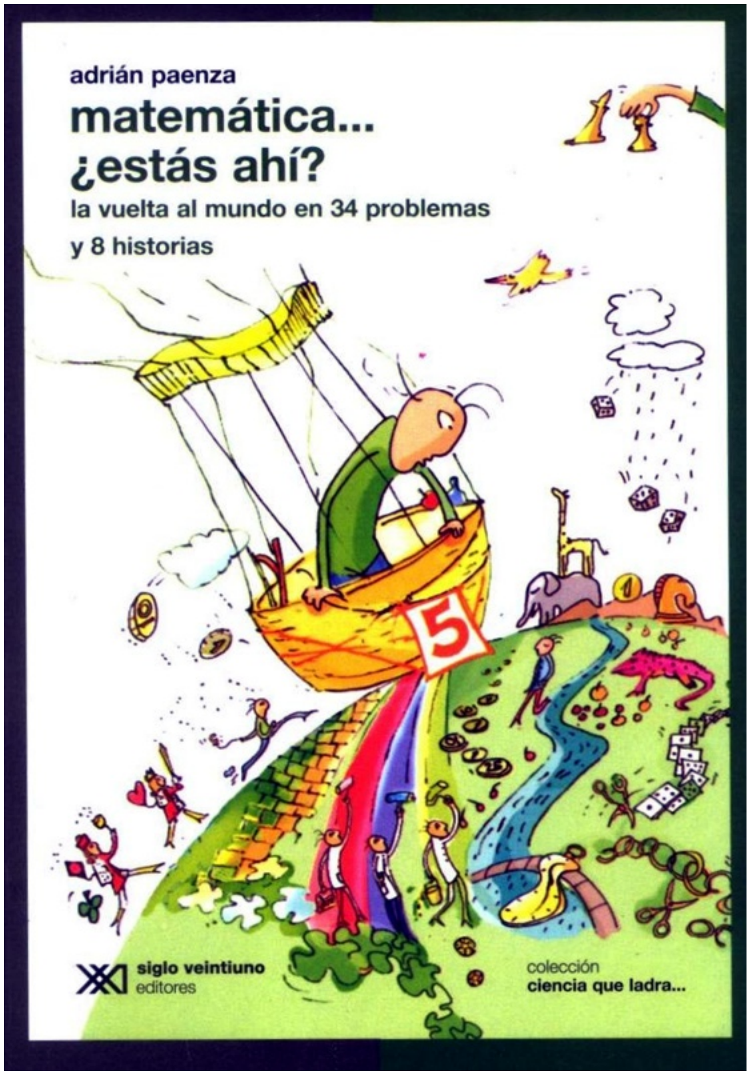

adrián paenza
matemática...
¿estás ahí?
la vuelta al mundo en 34 problemas
y 8 historias
siglo veintiuno
editores
colección
ciencia que ladra...

Índice

Las historias

Este libro (y esta colección)

Ya lo extrañábamos. Y aquí Adrián Paenza nos invita nuevamente a un viaje maravilloso a través de los problemas e historias de ese universo llamado matemática que, de su mano, aprendimos a disfrutar.

En estas páginas haremos otra visita al país de las maravillas, que, aun sin tortas mágicas que nos empequeñecen o gatos que desaparecen dejando sólo su sonrisa, ha sabido regalarnos sombrereros locos, cartas marcadas y números escondidos dignos de la mejor de las Alicias. Dicho sea de paso, es interesante recordar que la primera versión de la querida *Alicia en el país de las maravillas* no tenía varios de los juegos algebraicos y personajes absurdos que la hicieron famosa. Se dice que Lewis Carroll (el matemático Charles Dodgson, bastante conservador, según se cuenta) los incluyó en versiones posteriores con la secreta intención de burlarse de algunos de los desarrollos bastante radicales de la matemática de entonces. Quién diría: una de las historias más conocidas y disfrutadas de todos los tiempos podría deber buena parte de su fama a una interna entre matemáticos...

Nuestro querido Adrián no deja historia con cabeza (como la reina de corazones) ni recoveco sin husmear para demostrarnos, una vez más, que la matemática está a la vuelta de la esquina (y en la esquina misma), esperando que la descubramos, razonemos y apliquemos. Nos muestra también cómo los matemáticos no siempre están inmersos en una maraña de ecuaciones y pensamientos ininteligibles y, en cambio, se afanan por descubrir los secretos mundanos detrás de las compras en la verdulería, de las proporciones y los tamaños, de la intuición nuestra de cada día. Por ejemplo, conviene recordar que hay que tener cuidado si invitamos a Adrián -o a otros matemáticos- a comer pizza, ya que podríamos quedar enfrascados en una fascinante y sustanciosa discusión sobre cómo cortarla de manera que las porciones resulten realmente equitativas. El problema viene, sobre todo, si al mozo se le ocurre realizar un primer corte descentrado, por lo que las porciones necesariamente serán desiguales. Así, entre cálculos, *papers* y opiniones seguramente se nos enfriará el queso -pero quién nos quita lo aprendido...

En fin, que la matemática sigue estando ahí, para quedarse. Lo cual a esta altura ya se ha vuelto una sana costumbre.

Esta colección de divulgación científica está escrita por científicos que creen que ya es hora de asomar la cabeza fuera del laboratorio y contar las maravillas, grandezas y miserias de la profesión. Porque de eso se trata: de contar, de compartir un saber que, si sigue encerrado, puede volverse inútil.

Ciencia que ladra, no muerde, sólo da señales de que cabalga.

Diego Golombek

Agradecimientos

A los tres "lujos" que me puedo dar en la vida: Diego Golombek, director de la colección "Ciencia que ladra...", Carlos Díaz, director editorial de Siglo Veintiuno, y Claudio Martínez, el productor de *todos* los programas de televisión en los que trabajo. Como sucedió en las cuatro ediciones anteriores, ellos son quienes me estimulan a pensar, producir, escribir y grabar. Podría decir que sin ellos todo esto no existiría, pero no lo sé.

Lo que sí sé es que con ellos mi vida es más fácil. Y ninguna frase que elija para expresar mi gratitud serviría para hacerles justicia.

A Carlos D'Andrea, Gerardo Garbulsky, Juan Sabia, Alicia Dickenstein y Emanuel Ginóbili. Ellos son los "beta-testers", los que leen los textos antes de que aparezcan, los que los discuten, los critican y los ponen a prueba. Es curioso, pero hasta que cada uno de ellos no me da su opinión sobre cada problema, siento que todavía hay algo inconcluso. No sé decirlo de otra manera porque la palabra ya está muy gastada, y yo mismo la usé en el libro anterior, pero necesito recurrir a ella porque no se me ocurre nada mejor: gracias.

El contenido de un libro de estas características es el resultado de un esfuerzo colectivo. No me gustaría dejar la impresión de que yo me siento todas las mañanas frente a mi computadora, me quedo pensando un rato y se me ocurren problemas: no es así. Este libro es el fruto de ideas, sugerencias y escritos de muchísimas personas. No sabría cómo darles el crédito a todas porque no está claro que conozca siquiera a la mayoría de ellas. Sin embargo, hay un grupo al que SÍ conozco y que me apresuro a acariciar con mi gratitud: Carlos D'Andrea (otra vez), Juan Sabia, Pablo Coll, Pablo Milrud, Alicia Dickenstein, Matías Graña, Teresita Krick, Eduardo Dubuc, Gabriela Jerónimo, Pablo Amster, Ariel Arbiser, Cristian Czúbara.

A Woody González, Ariel Hassan y María Marta Scarano, porque, con su aporte en *Alterados por Pi,* me enseñan a entender la matemática desde otro lugar. Ellos me preguntan -sin ser matemáticos- hasta que, o bien entienden lo que digo, o me convencen de que el que no entiende soy yo. Sus contribuciones son impagables.

A quienes, difundiendo su pasión por la matemática, lograron seducirme: Enzo Gentile, Eduardo Dubuc, Miguel Herrera, Luis Santaló, Ángel Larotonda, Oscar Bruno, Nestor Búcari, Juan Sabia, Jorge Fiora, Ricardo Durán, Ricardo Noriega, Carmen Sessa, Alicia Dickenstein, Baldomero Rubio Segovia, Leandro Caniglia y Pablo Calderón.

Y, por supuesto, a toda la comunidad matemática, a la que le debo una gratitud particular porque quienes forman parte de ella no dejan de enviarme sugerencias e ideas, modos de pensar o abordar un problema, y son una fuente inagotable para estos libros. Mi reconocimiento a todos ellos.

A Ernesto Tenembaum, Marcelo Zlotogwiazda y Guillermo Alfieri, porque me acompañaron con su amistad en todos los proyectos que encaré hasta acá. Y por el respeto con el que me tratan... siempre.

Aunque sé que me repito, el crédito por la difusión que tienen estos textos les corresponde también a los múltiples comunicadores que en distintos programas de radio, televisión, revistas y/o diarios promueven esta forma de difundir la matemática y consiguen un efecto imposible de lograr sin su aporte.

A Ernesto Tiffenberg, por el estímulo que me da al seguir publicando mis artículos en mi querido *Página/12.* Y lo mismo para Verónica Fiorito e Ignacio Hernaiz del Canal Encuentro, y para Martín Bonavetti del Canal 7. Mi gratitud también para Tristán Bauer, alguien que ha sido esencial a la hora de transformar y traducir esta serie de libros de matemática al mundo de la televisión.

A Laura Campagna, Caty Galdeano, Juliana Cedro y Héctor Benedetti: desde sus distintas funciones en la editorial Siglo Veintiuno, todos ellos me protegen desde lugares difíciles de imaginar. Merecen un reconocimiento muy particular. Y mi gratitud.

A mis compañeros de El Oso Producciones, La Brújula, Canal 7, Canal Encuentro y *Página/12,* por el cariño que me expresan en cada momento. A todos, sin excepciones. Y ellos saben que no lo escribo porque así lo indique el *protocolo.*

Y por último, para las cinco personas que son mis guías éticos, por su posición en la vida en defensa de sus principios y el respeto a la sociedad que nos/los cobija: Marcelo Bielsa, Nelson Castro, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

Acerca del autor
Adrián Paenza

Nació en Buenos Aires en 1949. Es doctor en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires, donde se desempeña actualmente como profesor asociado del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Es, además, periodista. En la actualidad conduce los ciclos *Científicos Industria Argentina* -que ya está en su octava temporada y ha recibido el Martín Fierro al mejor programa periodístico en diversas ocasiones-, *Alterados por Pi, Explora* y *Laboratorio de ideas,* además de la serie infantil *Matemática..., ¿estás ahí?,* que saldrá al aire durante 2010. Trabajó en las radios más importantes y en los cinco canales de aire de la Argentina. Fue redactor especial de varias revistas y colaborador en tres diarios nacionales: *Clarín, Página/12* y *La Nación.* Actualmente es columnista especial de *Página/12.* Publicó en esta misma colección los cuatro tomos iniciales de la serie *Matemática... ¿estás ahí?,* que han sido un éxito de ventas en la Argentina, en otros países de Latinoamérica y también en Alemania y España, donde se han editado los dos primeros episodios. Asimismo, sus libros han sido publicados (o lo serán próximamente) en Rusia, Italia, República Checa, Brasil y Portugal. En 2007 recibió el premio Konex de platino en el rubro "Divulgación científica".

A Fruma y Ernesto, mis padres. Como siempre, mi gratitud eterna.

A mi hermana Laura y mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos: Paula, Santiago, Lorena, Máximo, Alejandro, Ignacio, Brenda, Miguelito, Viviana, Diego, Sabina, María Soledad, María José, Gabriel, Mía, Valentín, Lucas, Max, Amanda, Whitney, Jason y Landon.

A Carlos Griguol, mi amigo del alma.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Héctor Maguregui, Cristian Czúbara, Lawrence Kreiter, Gary Crotts, Dennis Fugh, Kevin Bryson, Alejandro Fabbri, Víctor Marchesini, Luis Bonini, Fernando Pacini, Gerardo Garbulsky, Marcos Salt, Santiago Segurola, Julio Bruetman, Ariel Hassan, Woody González, Antonio Laregina, Carlos Aimar, Marcelo Araujo y Claudio Pustelnik.

A mis amigas Ana María D Alessio, Nilda Rozenfeld, Teresa Reinés, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Nora Bernárdez, Carina Marchesini, Laura Bracalenti, Etel Novacovsky, Marisa Giménez, Norma Galletti, Alicia Dickenstein, Carmen Sessa, Carina Maguregui, Marcela Smetanka, Mónica Muller, Erica Kreiter, Marisa Pombo y Vivian Crotts.

A la memoria de mis seres queridos, aquellos que perdí en el camino: Guido Peskin, mis tías Delia, Elena, Miriam y Elenita; mi primo Ricardo, mi amiga Lola Bryson, y a la de mis entrañables compañeros de vida: Noemí Cuño, León Najnudel y Manny Kreiter. Y para Jorge Guinzburg también.

Prólogo

Empieza una nueva aventura. Un nuevo libro. El quinto de la serie.

Es curioso cómo cambiaron las cosas para mí en estos últimos cinco años, desde que apareció el primer volumen de *Matemática... ¿estás ahí?*

Antes, y debe de haber sido un problema mío (obviamente), sentía la necesidad de "defenderme" porque me gustaba la matemática. Ya no hablemos de "hacer" matemática, sino de tratar de comunicarla, divulgarla, volverla popular.

La matemática tenía muy mala prensa. Hoy ya no creo que sea tan así. La sociedad (me parece) está modificando su percepción. Es como si hubiera habido un *click* en algún lugar, una lamparita que se fue encendiendo y que motivó a muchas personas que históricamente declaraban "yo no sirvo para la matemática", "yo soy pésimo en matemática", "a mí nunca me interesó", etc., a generar una transformación en algún lugar.

Sin embargo, no me engaño: no creo que la gente haya cambiado de idea. No. Siguen pensando lo mismo sobre lo que sufrieron cuando eran jóvenes (o niños), pero lo que está afirmándose, creo, es la convicción de que lo que creían que era la matemática no era tan así. Como si lentamente se abriera paso la sospecha de que lo que les enseñaron en el colegio o en la escuela no *ERA* la verdadera matemática.

En todo caso, es como si una buena parte de la sociedad advirtiera ahora que quizás fue un "síntoma de salud" que a uno no le gustara, que la rechazara, que le resultara aburrida.

Para decirlo de otra forma: creo que la reacción adversa que produjo en usted o en la mayoría de las personas es absolutamente comprensible. ¿Cómo no habría de pasar? ¿Por qué no habría de pasar?

Piénselo de la siguiente manera: si ya adulto usted estuviera sentado en una sala donde una persona le diera respuestas a preguntas que usted no se hizo, posiblemente se quedaría un rato por respeto al que habla, pero después de un tiempo razonable se levantaría y se iría. Al menos, es lo que haría yo.

Ahora traslademos esta situación al caso de los jóvenes/niños que van al colegio y en forma compulsiva tienen que sentarse y enfrentar la misma escena día tras día, con la "única" diferencia de que ellos no pueden ausentarse voluntariamente. Tienen que quedarse y escuchar. Quedarse y tomar apuntes. Quedarse y repetir. Quedarse y prestar atención como si les interesara. Tienen que quedarse y aburrirse.

¿No es esperable entonces que la mayoría de la gente diga después, al cabo de varios años, que "la matemática le resultó inexpugnable, aburrida, incomprensible e inútil"? ¿Por qué habría de ser diferente?

Suponer, por ejemplo, que las marchas militares son LA música daría lugar a una situación parecida. O que formar parte de una barrera en un partido es EL fútbol. No. Si uno quiere seducir a alguien con algo, no puede empezar por ahí. La música pasa por Beethoven o la Negra Sosa, por Charly García o por Marta Argerich, por Piazzolla o los Beatles, pero no por Aurora o la Marcha de San Lorenzo.

El fútbol es Maradona y Messi, Pelé y Ronaldo, gambetas imposibles o goles memorables en partidos trascendentes, y no tiros libres desviados en una barrera bien formada por jugadores que saltan al unísono. Es decir, *eso* que nos contaron y nos presentaron durante muchísimos años como "la" matemática produjo lo inevitable: un fuerte rechazo.

Lo que ni usted ni yo sabíamos en ese momento es que lo que nos decían que era LA matemática, en realidad, no lo era. No es que no tenga NADA que ver con la matemática. SÍ, tiene que ver, pero no es ni por asomo LA matemática. Estoy convencido de que la matemática que hay que enseñar en los primeros estadios es la matemática recreativa, la matemática del juego. Es cuestión de encontrar los desafíos adecuados, como si fueran tesoros, de salir a buscarlos. Con la matemática HAY QUE JUGAR.

En todo caso, la idea no debería ser acumular conocimientos o conceptos, sino estimular la creatividad. Cualquiera de nosotros puede almacenar información en su base de datos. Es sólo cuestión de entrenar la memoria. Pero la memoria tiene "patas cortas". Uno se olvida de lo que no usa, y uno usa sólo lo que le sirve, lo que necesita.

Por otro lado, si uno quiere "tararear" una canción, no necesita saber "escribir" música, ni saber leer lo que está escrito en un pentagrama. Uno disfruta de poder cantar o escuchar una canción sin necesidad de saber música. ¿Se imagina lo que sentiríamos como sociedad si se privara de la música a todos los que no pueden componerla o leerla? Bueno, eso es lo que pasa con la matemática. En los momentos iniciales de nuestras vidas nos pasamos muchísimo tiempo tratando de aprender técnicas que poco tienen que ver con la belleza que encierra. Y casi nunca llegamos a apreciarla.

O si quiere, exagerando, piénselo así: uno aprende primero a hablar y después a escribir. Un niño empieza a hablar al año, más o menos, pero recién escribe y se comunica de esa forma a partir de los cuatro o cinco (o incluso más). ¿Se imagina a un niño sin poder hablar hasta no saber escribir?

¿Por qué no hacer lo mismo con la matemática? Más allá de las operaciones aritméticas elementales, el desafío no es "bajar línea", sino tratar de liberar la creatividad y la imaginación que cada niño posee. Lo que no tiene perdón es "matar la creatividad". Los niños van al colegio o a la escuela con una película virgen sobre la cual vamos a ayudarlos a que escriban su vida. No cumplimos con la tarea de adultos responsables si no los dejamos disfrutar de encontrar su propio camino. El placer del recorrido, no el supuesto placer de la llegada.

El objetivo es jugar y divertirse con la matemática en los primeros años. Disfrutar de hacer preguntas. Mejor dicho: lo que me parece más valioso es ayudar a generar preguntas.

Pero este libro no está pensado sólo para niños, sino para todo el mundo, para personas de cualquier edad. Se trata de poder -aun ahora- "jugar con la matemática", disfrutar de pensar, de considerar problemas, de suponer que faltan datos y luego descubrir que no era así, de aprender a frustrarnos porque algo no nos sale tan rápido como querríamos, y sobre todo, a disfrutar del trayecto. Y siempre habrá una página de respuestas que lleguen en auxilio de la desesperación cuando haga falta.

Quiero reproducir acá lo que leí alguna vez, aunque no sepa exactamente a quién corresponde el crédito. En cualquier caso, no soy yo el autor. Decía así:

Uno no deja de jugar porque envejece,
sino que envejece porque deja de jugar.

La matemática no está hecha para ser observada, ni para ver lo que hicieron otros (y eventualmente frustrarse con eso). No. A la matemática hay que hacerla, transformarla, mejorarla, cambiarla. Y eso sólo se consigue estimulando la creatividad.

La idea entonces es tratar de recuperar (si es posible) algo de lo que nos han privado (o que nos han "robado") en nuestra niñez/ juventud: el placer de disfrutar de la "otra cara" de la matemática, la que deberíamos haber conocido antes. El objetivo de todos estos libros es que no nos perdamos la oportunidad de jugar con la matemática, aunque uno crea que "ya pasó la oportunidad".

Lo que sigue, entonces, apunta en esa dirección. Ojalá que usted disfrute al leerlo tanto como yo al escribirlo.

Continuará.

Los problemas y sus soluciones

Problema 1
Carrera de 100 metros y orden de llegada

Además de ser entretenido, este problema sirve para entrenar la capacidad de pensar. Por eso no vale la pena que lea el resultado antes de intentar una respuesta. Perdería toda la gracia (y creo que la tiene).

Acá va: se corrieron los 100 metros llanos en los juegos olímpicos. Participaron en la final sólo cinco competidores: Bernardo, Diego, Ernesto, Antonio y Carlos. Fíjese si, partiendo de los siguientes datos, puede encontrar el orden en el que llegaron a la meta:

A. Antonio no fue ni el primero ni el último.
B. Antonio, sin embargo, quedó por delante de Bernardo.
C. Carlos corrió más rápido que Diego.
D. Ernesto fue más rápido que Antonio pero más lento que Diego.

Antes de avanzar, permítame sugerirle algo. En general, para resolver este tipo de problemas hace falta tener el tiempo suficiente como para sentarse un rato, escribir y conjeturar. Llegar a la solución suele ser irrelevante. El atractivo, en todo caso, surge del recorrido, de la capacidad para imaginar y pensar. Es, ni más ni menos, que un problema de lógica pura. Que lo disfrute.

Solución

Una manera de abordar el problema

Voy a anotar las cinco primeras posiciones. El objetivo (obviamente) es llenarlas con los nombres de cada persona. Pero lo que voy a hacer por ahora es anotar a quienes no pueden estar allí.

Por ejemplo: por la condición A, Antonio no puede estar ni primero ni último, entonces la lista que propongo comenzará así:

1) Antonio

2)
3)
4)
5) Antonio

Por otro lado, como por la condición *B* sabemos que Antonio terminó delante de Bernardo, entonces Bernardo no pudo haber llegado primero. Porque si hubiera sido así, ¿en qué posición habría llegado Antonio?

Luego, si retomamos la lista de los primeros cinco lugares, los que *no* pueden haber quedado en las posiciones 1 y 5 son (hasta acá):

1) Antonio - Bernardo
2)
3)
4)
5) Antonio

Por otra parte, Ernesto terminó detrás de Diego. Luego, Diego no pudo haber terminado último (si no, ¿dónde habría quedado Ernesto?). Por eso agrego a Diego en el lugar número 5:

1) Antonio - Bernardo
2)
3)
4)
5) Antonio - Diego

Además, Ernesto fue más rápido que Antonio. Luego, Ernesto no pudo figurar *tampoco* en el último lugar (si no, no habría lugar para Antonio):

1) Antonio - Bernardo
2)
3)
4)
5) Antonio - Diego - Ernesto

Como Antonio le ganó a Bernardo, Bernardo no pudo haber salido primero. Pero como sabemos que tampoco Antonio pudo salir primero, eso significa que Bernardo no pudo haber salido segundo porque, si no, Antonio debería haber salido primero. Luego, Bernardo no pudo ser ni primero ni segundo.

1) **Antonio - Bernardo**
2) **Bernardo**
3)
4)
5) **Antonio - Diego - Ernesto**

Por la condición C, Carlos fue más rápido que Diego. Luego, Diego no pudo haber salido primero, y Carlos no pudo haber sido último. La lista queda así:

1) **Antonio - Bernardo - Diego**
2) **Bernardo**
3)
4)
5) **Antonio - Diego - Ernesto - Carlos**

Aquí debemos hacer una breve pausa. En el lugar número 5 ya hemos ubicado cuatro nombres. Eso quiere decir que, si hemos razonado correctamente, este lugar, el quinto, ya tiene un dueño. Y ese dueño es Bernardo. Por lo tanto, ahora voy a agregar a Bernardo en los lugares 3 y 4 de la lista (en el primero y el segundo ya estaba). Luego, hemos llegado a la primera conclusión: ¡Bernardo salió último!

1) **Antonio - Bernardo - Diego**
2) **Bernardo**
3) **Bernardo**
4) **Bernardo**
5) **Antonio - Diego - Ernesto - Carlos (BERNARDO)**

Avanzo un paso más. De acuerdo con la condición D, Ernesto fue más lento que Diego. Por lo tanto, Ernesto no pudo haber sido primero tampoco. Luego, la grilla queda así (e invita a una nueva conclusión):

1) Antonio - Bernardo - Diego - Ernesto
2) Bernardo
3) Bernardo
4) Bernardo
5) Antonio - Diego - Ernesto - Carlos (BERNARDO)

Mirando el primer puesto, la nueva conclusión es que *el único* que pudo haber salido primero es Carlos. Y esto contesta la primera pregunta que se había formulado. Ahora puedo agregar el nombre de Carlos en los lugares 2, 3 y 4 (en el quinto ya figuraba):

1) Antonio - Bernardo - Diego - Ernesto (CARLOS)
2) Bernardo - Carlos
3) Bernardo - Carlos
4) Bernardo - Carlos
5) Antonio - Diego - Ernesto - Carlos (BERNARDO)

Como Antonio no pudo haber salido quinto (por la primera restricción), el peor lugar en el que pudo ubicarse es el cuarto. Por la condición *D* sabemos que Ernesto fue más rápido que Antonio y, por lo tanto, si éste no pudo ser quinto, entonces Ernesto no fue el cuarto.

1) Antonio - Bernardo - Diego - Ernesto (CARLOS)
2) Bernardo - Carlos
3) Bernardo - Carlos
4) Bernardo - Carlos - Ernesto
5) Antonio - Diego - Ernesto - Carlos (BERNARDO)

Pero por la misma indicación (*D*) Ernesto fue más lento que Diego, y ya sabemos que Ernesto no fue ni primero ni cuarto ni quinto; entonces, le quedarían (en principio) dos lugares posibles: segundo o tercero. Pero no puede ser segundo porque eso obligaría a que Diego fuera primero (por haber corrido más rápido), y eso no puede ser. Luego, ¡Ernesto salió tercero!

1) **Antonio - Bernardo - Diego - Ernesto (CARLOS)**
2) **Bernardo - Carlos - Ernesto**
3) **Bernardo - Carlos (ERNESTO)**
4) **Bernardo - Carlos - Ernesto**
5) **Antonio - Diego - Ernesto - Carlos (BERNARDO)**

Ahora sólo queda por decidir entre Diego y Antonio: quién salió segundo y quién cuarto. Como por la condición *D* sabemos que Ernesto fue más lento que Diego, y Ernesto salió tercero, Diego tuvo que haber salido segundo y, por lo tanto, Antonio tuvo que haber salido cuarto.

En consecuencia, el resultado final fue el siguiente:

1) **CARLOS**
2) **DIEGO**
3) **ERNESTO**
4) **ANTONIO**
5) **BERNARDO**

Moraleja: Este problema que detallé con tanto cuidado es sólo un ejemplo de una gran variedad de curiosidades de este tipo. Usted mismo, una vez que resuelva algunos, podría generar uno para que otros lo resuelvan. Por supuesto, los datos no deben ser contradictorios entre sí porque, en ese caso, no habrá solución. Pero eso no alcanza. La idea no sólo es que *haya* solución, sino que ésta sea única. Es decir, tal como se ve en el razonamiento presentado más arriba, el orden en que llegaron los competidores es *único.*

Por último, el hecho de haber *imaginado* una carrera de 100 metros, con competidores y ubicaciones en el podio, es sólo una fantasía. En realidad, lo interesante ahora sería que usted (si tiene ganas y tiempo) relea el enunciado del problema y trate de ver si lo puede plantear en términos abstractos.

Es decir, uno podría formular el problema de la siguiente forma: se tienen cinco puntos ordenados en una recta (que podría ser un "centímetro", como el que usan las costureras). El que está más a la derecha es el mayor y el que está más a la izquierda es el menor; es decir, los puntos están ordenados. Los voy a llamar *A, B, C, D* y *E.*

Voy a establecer una equivalencia entre los nombres que usé más arriba y estas cinco letras. O sea:

A = Antonio B = Bernardo C = Carlos D = Diego E = Ernesto

Entonces, las cuatro condiciones que figuran más arriba podrían traducirse así:

1. *A* no es ni el punto que está más a la derecha ni el que está más a la izquierda.
2. Sin embargo, *A* está a la derecha de B.
3. *C* es mayor que *D.*
4. *E* es mayor que *A* pero menor que D.

Con estos datos, trate de ordenar los puntos. Siguiendo el mismo razonamiento que hicimos antes, pero sin hacer referencia a una carrera de 100 metros, uno debería concluir que el orden de los puntos en la recta fue el siguiente:

B A E D C

¿Por qué?

a) Por la condición 4, uno deduce que $A < E < D$.
b) Por la condición 2, se sabe que $B <$ A. Juntando ambas,

$$B < A < E < D$$

c) Por la condición 3, uno concluye que $D < C$.

O sea, uniendo lo que dedujimos en (a), (b) y (c) tendremos:

B < A < E < D < C

Como se ve, no hizo falta usar la condición 1, que se deduce (o está contenida) en la 2 y la 4: la segunda condición dice que *A* no puede ser el menor número (porque está a la derecha de B) y la cuarta dice que *A* no puede ser el mayor (porque *E* es mayor que A).

La idea, entonces, es sólo encontrar una *historia* que tenga sentido para plantear un problema que tendrá tantas posibles presentaciones como su fantasía le permita.[1]

[1] Cuando leyó este problema, Carlos D'Andrea agregó: "Viene bien hacer el razonamiento *exhaustivo* de todas las soluciones, sobre todo para destacar el hecho de que muchas veces estos problemas de lógica (e incluso los sudokus) tienen más de una solución, y si uno quiere asegurarse de que existe *la* solución, entonces debería considerar todos los casos, o bien llegar a alguna argumentación de la cual se deduzca la unicidad de la respuesta".

Problema 2
Medias blancas y medias negras

En un cajón hay cuatro medias (no pares de medias, sino medias sueltas) que son o bien de color blanco (B) o bien de color negro (N). Se sabe que si metemos la mano y sacamos dos medias cualesquiera, la probabilidad de que ambas resulten blancas es de ½. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de medias negras?

Solución

Respuesta: ¡cero!

¿Por qué? Llamemos a las medias *B1, B2, X1* y *X2.* Las que llamamos *B1* y *B2* son las dos medias blancas que *tiene que haber,* si no, no habría posibilidades de tener un par blanco. No sabemos de qué color son las otras dos. Veamos cuáles son las posibles combinaciones:

B1 - B2
B1 - X1
B1 - X2
B2 - X1
B2 - X2
X1 - X2

Como la probabilidad de sacar un par blanco es de ½, las medias no pueden ser todas blancas (si no, la probabilidad sería 1).

Luego, *X1* y *X2* son ambas negras, o bien una es negra y la otra blanca. El hecho de que la probabilidad de sacar dos medias blancas sea ½ significa que, de las seis posibilidades que figuran más arriba, tres tienen que ser dos blancas pero las otras tres no pueden incluir dos blancas.

Si *X1* y *X2* fueran negras, de las seis posibilidades quedarían entonces estas probabilidades:

2 blancas: 1 / 6 (B1 - B2)

2 negras: 1 / 6 (X1 - X2)

mixtas: 4 / 6 = 2 / 3 (B1 - X1, B1 - X2, B2 - X1 y B2 - X2)

Luego, *X1* y *X2* no pueden ser negras... Veamos qué pasa si una de las dos es blanca, digamos *X1*, y la otra, *X2*, es negra.

En ese caso, tenemos los siguientes pares blancos:

B1 - B2

B1 - X1

B2 - X1

Esto da justo ½ probabilidad de que haya un par blanco.

Veamos los otros tres pares que quedan formados:

B1 - X2

B2 - X2

X1 - X2

Los tres restantes serán ¡mixtos! Luego, la probabilidad de que haya un par negro es ¡cero![2]

[2] Podría haber planteado el problema de una forma más general: "Sabiendo que la probabilidad de sacar al azar dos medias y que ambas resulten blancas es ½, decida cuantas medias blancas y cuantas negras tiene que haber en una caja". Si uno resuelve este último caso (y deduce que hay tres blancas y una negra), el problema que plantee originalmente queda automáticamente contestado.

Problema 3
Uvas y cerezas

Éste es un problema clásico, muy lindo. Supongamos que usted es un frutero que no sólo quiere vender frutas por separado sino que intenta mezclar algunas frutas de estación y ofrecerlas en contenedores especialmente preparados.
En este caso, el frutero tiene estas frutas:

a) 40 kilos de uvas que le costaron $ 71 por kilo.
b) Varios kilos de cerezas que le costaron $ 50 por kilo.

Si quiere usar *todas las uvas,* ¿cuántos kilos de cerezas tendrá que incluir, de manera tal que la mezcla cueste $ 64 por kilo?

Solución.
Llamemos C al número de kilos de cerezas que tiene que poner. El *costo* de las cerezas puede expresarse así:

$$(50) \times C = 50\ C$$

Recordemos que mezclamos esta cantidad de kilos de cerezas (C) con los 40 kilos de uvas que teníamos, que costaron $ 71 cada uno. Así, el *costo* de las uvas (total) será:

$$40 \times 71 = 2840$$

Por otro lado, la *mezcla* que tenemos *pesa* (40 + C), ya que eso fue lo que incluimos en la mezcla (los 40 kilos de uvas y los *C* kilos de cerezas). Lo que sabemos es que esta mezcla de (40 + C) tiene que costar $ 64 por kilo.
Resumiendo, disponemos de los siguientes datos:

a) Por un lado, el costo total de la mezcla es:

$$(50) \times C + (71) \times 40$$

Esto se obtiene porque son $ 50 por kilo de cerezas, e incluimos *C* kilos, más 40 kilos de uvas a $ 71 cada uno.

b) El precio total de la mezcla es:

$$(C + 40) \times 64$$

Esto se deduce del hecho de que uno tiene que incluir los 40 kilos de uvas más *C* kilos de cerezas (todavía no sabemos cuántos) y multiplicar por el *precio* que queremos que valga la mezcla, o sea, $ 64.

Al igualar estos dos números obtenemos:

$$50\ C + 71 \times 40 = (C + 40) \times 64 = (64 \times 40) + 64\ C$$
$$(71 \times 40) - (64 \times 40) = (64 - 50)\ C$$
$$2840 - 2560 = (64 - 50)\ C$$
$$280=14\ C$$
$$C = 20$$

Por lo tanto, uno tiene que incluir 20 kilos de cerezas para que la mezcla valga $ 64.

Problema 4
Grilla de números con incógnita

El que sigue también es un problema *clásico.* Es decir, existen muchísimas variantes, todas muy parecidas y con soluciones similares. Una vez que haya descubierto qué es lo que hay que hacer, verá que no vale la pena avanzar con otros ejemplos. Son todos iguales. Acá va un caso.

A uno le dan una grilla de letras y números como ésta:

A	A	B	B	14
C	D	C	D	6
A	D	C	B	10
A	D	B	B	11
14	7	10	x	

El objetivo es reemplazar todas las letras por números enteros positivos de manera tal que, si uno suma todos los números de la primera fila, el resultado sea 14. Al sumar los de la segunda fila, el resultado debe ser 6. En el caso de la tercera, 10, y en el de la cuarta, 11. Y lo mismo con las columnas. La suma de la primera debe dar 14, la segunda 7, la tercera 10 y la cuarta tiene un valor x, por ahora desconocido. El problema consiste en encontrar los valores de *A, B, C, D* y también de x.[3]

Solución.

[3] Si el problema consistiera solamente en encontrar el valor de x, sería mucho más sencillo, ya que la suma de los números de la última columna (14, 6, 10 y 11) y la suma de los números de la última fila (14, 7, 10, x) tienen que ser iguales. Es decir:

$$14 + 6 + 10 + 11 = 41 = 14 + 7 + 10 + x \quad 41 = 31 + x$$

Y de acá se deduce (despejando la x) que el valor de x es (41 - 31) = 10. O sea, uno puede calcular el valor de la x sin necesidad de conocer A, B, C y D.

Lo que le propongo es que *escribamos* las igualdades que deberían verificarse entre todas las letras y los números que tenemos hasta ahora, y veamos cómo podemos *jugar* con ellos hasta alcanzar alguna conclusión.

Primero las filas:

a) **2 A + 2 B = 14**

b) **2 C + 2 D = 6**

c) **A + B + C + D = 10**

d) **A + 2 B + D = 11**

Y luego las columnas:

e) **3 A + C = 14**

f) **A + 3 D = 7**

g) **2 B + 2 C = 10**

h) **3 B + D = x**

¿Qué hacer ahora? De la ecuación (f) se deduce que *A* = 7 - 3 *D.* Luego, si *despejamos* la letra D, tenemos:

3 D = 7 - A

y de acá

D = (7 - A) / 3 (*)

De la ecuación (a) se deduce que *A* + *B* = 7 (basta dividir por 2). Luego,

B = 7 - A (**)

De la ecuación (e) se infiere que 3 *A* + *C* = 14. Luego, *despejando C,*

C = 14 - 3 A (***)

Por último, a partir de la ecuación (c) se sabe que

$$A + B + C + D = 10 \quad (****)$$

Reemplazando en (****) lo que figura en (*), (**), (***), se sigue que:

$$A + B + C + D = A + (7 - A) + (14 - 3 A) + (7 - A) / 3 = 10$$

Pero esto significa que:

$$21 - 3 A + (7 - A) / 3 = 10$$

$$[63 - 9 A + (7 - A)] / 3 = 10$$

Luego, pasando el número 3 del otro lado, se tiene:

$$63 - 9 A + (7 - A) = 30$$

$$70 - 10 A = 30$$

$$70 - 30 = 10 A$$

$$40 = 10 A$$

y por lo tanto:

$$A = 4$$

Una vez llegados acá, usamos las igualdades (*), (**) y (***), y allí donde figura A la reemplazamos por el número 4.

$$D = (7 - A) / 3 = (7 - 4) / 3 = 3 / 3 = 1$$

O sea:

$$D = 1$$

$$B = 7 - A = 7 - 4 = 3$$

O sea,

$$B = 3$$

Por último,

$$C = 14 - 3A = 14 - 3 \cdot 4 = 14 - 12 = 2$$

O sea,

$$C = 2$$

Juntando toda la información, hemos deducido que:

$$A = 4 \quad B = 3 \quad C = 2 \quad D = 1$$

Ahora sólo falta reemplazar estos valores en la grilla que figura más arriba y comprobar que lo que uno quería que sucediera (que las filas y columnas resultarán ser los números que figuran al costado y abajo respectivamente) efectivamente sucede. Por último, el número *x* que queríamos calcular resulta ser el 10.

4	4	3	3	14
2	1	2	1	6
4	1	2	3	10
4	1	3	3	11
14	7	10	$\boxed{10}$	

Problema 5
Problema para pensar con dos dígitos

Elija un número de dos dígitos cualesquiera (que no sean iguales). Para fijar las ideas, yo voy a elegir uno: 73 (pero, obviamente, el problema funciona con cualquier número).

Escríbalo en alguna parte. Ahora, *conmute* las cifras del número que eligió ("conmutar" significa cambiarlas de lugar). En el caso que yo elegí (el 73), al *conmutar* los dígitos obtengo:

37

Una vez hecho esto, prepárese para restar los dos números (poniendo el *mayor* encima del menor). En este caso la cuenta sería así:

$$\begin{array}{r} \mathbf{73} \\ - \ \mathbf{37} \\ \hline \end{array}$$

Y el resultado es 36.

Ahora, fíjese en la siguiente tabla:

1	!	11	@	21	#	31	=	41	%	51	%	61	^	71	*	81	&	91	*
2	@	12	#	22	$	32	#	42	$	52	%	62	$	72	&	82	$	92	@
3	#	13	@	23	+	33	^	43	#	53	+	63	&	73	@	83	*	93	$
4	$	14	&	24	*	34	!	44	^	54	&	64	+	74	@	84	%	94	!
5	%	15	+	25	&	35	%	45	&	55	=	65	#	75	%	85	+	95	@
6	^	16	%	26	$	36	&	46	#	56	%	66	+	76	#	86	!	96	%
7	+	17	=	27	&	37	^	47	@	57	=	67	^	77	%	87	#	97	!
8	*	18	&	28	=	38	+	48	@	58	%	68	%	78	@	88	^	98	#
9	&	19	^	29	&	39	=	49	&	59	$	69	#	79	^	89	%	99	&
10	=	20	+	30	=	40	%	50	^	60	#	70	*	80	$	90	+	00	&

Tabla 1

Fíjese en el *símbolo* que se encuentra a la derecha del número que obtuvo. (En el ejemplo que he elegido, al lado del 36 está el símbolo &.)

Usted también encontró &, ¿no es así?

Hagamos juntos otro ejemplo (elija otro número). Yo voy a usar el 82. Como vimos en el caso anterior, *conmuto* los dígitos (o sea, los *cambio de lugar).* Ahora tengo el número 28. Los resto (es decir, al mayor le resto el menor):

82 - 28 = 54

Igual que antes, pero ahora con el número 54 (y usted con el número al que llegó), fíjese en la siguiente tabla:

1	!	11	~	21	]	31	=	41	%	51	%	61	^	71	*	81	>	91	*
2	~	12	]	22	$	32	]	42	$	52	%	62	$	72	>	82	$	92	~
3	]	13	~	23	+	33	^	43	]	53	+	63	>	73	~	83	*	93	$
4	$	14	>	24	*	34	!	44	^	54	>	64	+	74	~	84	%	94	!
5	%	15	+	25	>	35	%	45	>	55	=	65	]	75	%	85	+	95	~
6	^	16	%	26	$	36	>	46	]	56	%	66	+	76	]	86	!	96	%
7	+	17	=	27	>	37	^	47	@	57	=	67	^	77	%	87	]	97	!
8	*	18	>	28	=	38	+	48	~	58	%	68	%	78	~	88	^	98	]
9	>	19	^	29	>	39	=	49	>	59	$	69	]	79	^	89	%	99	>
10	=	20	+	30	=	40	%	50	^	60	]	70	*	80	$	90	>	00	>

Tabla 2

Observe el *símbolo* que figura a la derecha del número que encontró. En mi ejemplo (82 - 28 = 54), al lado del 54 está el símbolo >. ¡No me diga que usted también encontró el mismo! ¿Por qué habrá pasado esto?

Ahora, ¿no le dan ganas de descubrir cómo hice para que nuestros resultados coincidieran? Más aún: ¿no le interesaría revisar todo el proceso para entender cómo yo puedo saber qué símbolo encontró?

Repita todo lo que hicimos juntos empezando con otro número. Fíjese nuevamente en lo que pasa. Creo que conviene que se tome un tiempo para pensarlo...

Solución.

Antes de avanzar con la respuesta, le propongo lo siguiente. Elija *diez* números con los cuales empezar. Practique con ellos todo lo que está propuesto en el problema pero no se fije en la lista. Simplemente haga los cálculos correspondientes (o sea, conmútelos, réstelos y fíjese qué números obtiene).

Voy a hacerlo yo también con diez ejemplos cualesquiera: 83, 37, 82, 76, 53, 85, 13, 62, 29 y 97.

83	37	82	76	53	85	13	62	29	97
38	73	28	67	35	58	31	26	92	79
45		54	09	18	27		36		18

Los que quedaron sin resultado son aquellos en los que hay que restar poniendo el mayor de los dos números arriba. En los tres casos las operaciones que faltan son:

73	31	92
37	13	29
36	18	63

Ahora sí, quiero *agrupar todos* los números que obtuve:

45, 36, 54, 09, 18, 27, 18, 36, 63, 18...

¿Le sugiere algo esta lista? Los voy a agrupar de otra forma:

09, 18, 27, 36, 45, 54, 63.

Se parece mucho, ¡a la tabla del 9!

O sea, lo que uno descubre es que todos los resultados que encontró son múltiplos de 9. Y si va hasta la Tabla 1 y coteja los símbolos que hay a la derecha de cada múltiplo de 9, ¿qué descubre? (Hágalo por sus propios medios.) Lo que descubre es que a la derecha de cada uno de los *resultados posibles* está el símbolo &.

Lo que restaría ver entonces, para poder finalizar este análisis, es por qué *siempre* resulta un número múltiplo de 9.

Hagamos lo siguiente: tome un número de dos dígitos cualesquiera. Digamos, el número *ab.* Sólo para poner un ejemplo, piense en el 73. El número 73 es la forma *abreviada* que usamos para escribir: 70 + 3. O sea,

$$73 = 7 \times 10 + 3$$

En el caso del número *ab* esta escritura es también una forma abreviada de escribir

$$ab = 10a + b$$

Por lo tanto, si uno quiere *restar* **ab - ba,** lo que está haciendo es:

$$ab - ba = [(10a) + b] - [(10b) + a] = 10a + b - 10b - a =$$

$$9a - 9b = 9\ (a - b)$$

Es decir que el número que obtiene es un múltiplo de 9. Por lo tanto, no importa cuál sea el número que elija para empezar el juego, una vez que realice todo el proceso *obtendrá invariablemente un múltiplo de 9.* Y como al costado derecho de todos los múltiplos de 9 hay un símbolo &, no importa cuál sea el número de partida, *todos* lo van a llevar a &. Y lo mismo sucede en el segundo ejemplo, donde al lado de *cada múltiplo de 9* ubiqué el símbolo >, que es el que apareció tanto en su caso como en el mío.

Problema 6
¿Quién dice la verdad?

No sé cómo lo vive usted, pero cuando yo escucho un problema que me interesa, lo pienso durante un tiempo y, si puedo, lo resuelvo solo. Si no puedo, consulto, leo, hasta sentir que hice todo lo posible por encontrar la respuesta. Pero aun cuando la encuentre (solo o con ayuda), me sucede que después de un tiempo la olvido.

Por eso, cuando me tropiezo con el problema otra vez, en lugar de recordar la solución que encontré en algún momento anterior, aprovecho para pensarlo nuevamente. Claro, hay veces que me acuerdo de lo que había hecho para resolverlo -porque lo vi hace poco o porque me dejó marcado por alguna razón-. Pero otras veces decididamente no me acuerdo. Y esto es bueno no sólo porque me permite pensarlo de nuevo, sino porque me hace creer que estoy frente a un problema nuevo.

Lo que motivó esta digresión es un problema que escuché hace mucho tiempo, pero que tengo que volver a pensar cada vez que veo. Y lo bueno es que siempre me lleva un poco de tiempo (o mucho, dependiendo de las circunstancias). Lo planteo acá y la/ lo dejo con él. Es una verdadera joyita.

En el país *Vermentira* (por ponerle un nombre), la gente está dividida de la siguiente forma: están aquellos que dicen siempre la verdad (los *verdotones)* y aquellos que mienten siempre (los *men- tirones).* Lo curioso es que, al margen de que cada uno tenga esa característica tan particular, no hay forma de distinguirlos por su apariencia.

Ahora supongamos que una persona viaja desde Madrid y, no bien llega a este país tan especial, se encuentra con tres mujeres, que voy a llamar Alicia, Beatriz y Carmen. Esta persona está informada de las características en que está dividida la población de Vermentira y, cuando enfrenta a estas mujeres, ansia ver de qué manera puede descubrir a qué categoría pertenece cada una, y entonces decide hacerles las siguientes preguntas:

1. A Alicia le pregunta: "¿A qué categoría pertenece Beatriz?". Y Alicia le contesta: *A mentirones.*

2. A Beatriz le pregunta: "¿Es verdad que Alicia y Carmen pertenecen a diferentes categorías?". Y Beatriz le responde: *No.*
3. Por último, le pregunta a Carmen lo mismo que le había preguntado a Alicia: "¿A qué categoría pertenece Beatriz?". Y Carmen le dice: *Ella es una verdotona.*

El problema consiste en poder contestar:

a) Con esas tres preguntas que hizo la persona, ¿se puede determinar a qué categoría pertenece cada una de las mujeres?
b) Si se pudiera, indique a qué grupo pertenecería cada una (Alicia, Beatriz y Carmen).
c) Si no se pudiera, explique las razones.

Solución.

Antes de escribir una *potencial* solución, quiero invitarlo a reflexionar algo conmigo... y créame que vale la pena. Más aún: ¿qué gracia tendría que leyera la respuesta sin haberse tomado el tiempo para pensarla? Lo pongo en otros términos: si usted lee lo que sigue más abajo (donde está la respuesta al problema), ¿qué ganó? Claro, sabría cómo resolverlo, pero ¿no le dan ganas de ponerse a pensar un rato y tratar de descifrarlo sola/o? Es que en la vida los problemas que se nos plantean no vienen -lamentablemente- con una solución que uno pueda leer "más abajo". Por lo tanto, creo que conviene vencer la tentación de leer y ponerse a pensar.

En todo caso es *mi* idea, y no crea que siempre puedo ponerla en práctica. Hay veces que no tengo paciencia para pensar algo o no me interesa tanto el tema, y lo que termino por hacer es lo que le propongo a usted que *no* haga. Pero estoy convencido de que cuantas más situaciones nuevas uno enfrente, cuantos más debates internos uno atraviese., mejor preparado estará para encarar la vida cotidiana y para producir algo nuevo. Una vez más, es sólo mi idea.

Hay muchas maneras de abordar este problema. Voy a proponerle un par, pero estoy seguro de que no necesariamente coincidirán con las que usted haya pensado.

1. Podría pasar que Alicia, Beatriz y Carmen fueran todas verdotonas. Pero también podría pasar que Alicia y Beatriz fueran verdotonas y Carmen, en cambio, fuera mentirona. O bien podrían ser mentironas Alicia y Carmen, y Beatriz verdotona. Y así siguiendo.

Como se advierte, *no hay* muchas posibles distribuciones. Siga usted con todos los casos y va a descubrir que en total hay 8.

Ahora bien: uno podría intentar ver, en cada caso, si es posible que den las respuestas que figuran más arriba.

Veamos un ejemplo. Supongamos que las tres dijeran *siempre* la verdad (o sea que las tres fueran verdotonas). ¿Podría suceder? Es que si usted revisa las respuestas que ellas dieron, va a deducir que la respuesta 1 y la 3 son contradictorias (piense por qué).

Sigo yo. Si las tres *tuvieran* que decir la verdad, tanto cuando le preguntan a Alicia como cuando le preguntan a Carmen a qué grupo pertenece Beatriz, las dos tendrían que contestar lo mismo. Y como Alicia dice una cosa y Carmen otra, la posibilidad de que las tres digan la verdad no es viable.

Ahora lo dejo probando las otras opciones. Al hacerlo, al agotar los casos, va a descubrir que Alicia es verdotona, en tanto que Beatriz y Carmen son mentironas. Como son sólo *8* casos para analizar, con un poco de paciencia va a ver que *ésa* es la única solución posible.

2. Otra manera de pensar el problema es la que le propongo a continuación. De acuerdo con las respuestas a 1 y 3, Alicia y Carmen no pueden pertenecer al mismo grupo (porque en ese caso darían la misma respuesta: o bien las dos mentirían o bien las dos dirían la verdad). Como las respuestas que dieron en 1 y 3 son diferentes, estamos obligados a deducir que una miente y la otra dice la verdad. Pero todavía no sabemos cuál es cuál.

Sin embargo, cuando le preguntan a Beatriz si Alicia y Carmen pertenecen a grupos diferentes y ella contesta que no, esa respuesta significa que Beatriz tiene que estar mintiendo, porque nosotros sabemos que Alicia y Carmen *sí* pertenecen a grupos distintos. Luego, Beatriz miente (o sea, es mentirona). Por lo tanto, cuando en la tercera respuesta Carmen dice que Beatriz dice la verdad, ya sabemos que eso no es cierto. Por lo tanto, Carmen está mintiendo. Y está mintiendo porque es mentirona. Y como Alicia y ella (Carmen) pertenecen a distintos grupos, entonces Alicia dice la verdad.

En resumen: Alicia es verdotona, Beatriz es mentirona y Carmen también lo es. Y listo.

Problema 7
¿Cierto o falso?

El que sigue es un problema interesante, porque no requiere "saber" nada, ni haber "aprendido" nada. Es un problema "puro". ¿Qué quiero decir con esto? Que no hace falta ningún conocimiento previo ni haber estudiado nada de lo que nos "enseñan" en ninguno de los escalones naturales de la educación: escuela primaria, colegio secundario, etc.

Para abordarlo, sólo hace falta tener ganas de pensar. Nada más. Nada menos, también. La/lo invito a que se entretenga en el camino.

Se trata de poder decidir cuál (o cuáles) de las siguientes frases es (o son) ciertas o falsas. Y, por supuesto, de dar una razón que explique su conclusión. Acá van:

1. Exactamente una frase de esta lista es falsa.
2. Exactamente dos frases de esta lista son falsas.
3. Exactamente tres frases de esta lista son falsas.
4. Exactamente cuatro frases de esta lista son falsas.
5. Exactamente cinco frases de esta lista son falsas.
6. Exactamente seis frases de esta lista son falsas.
7. Exactamente siete frases de esta lista son falsas.
8. Exactamente ocho frases de esta lista son falsas.
9. Exactamente nueve frases de esta lista son falsas.
10. Exactamente diez frases de esta lista son falsas.

Solución.

La/lo quiero invitar a pensar lo siguiente: ¿será posible que entre las diez frases haya dos (o más) que sean verdaderas al mismo tiempo? Si me permite una sugerencia, no avance en la lectura antes de reflexionar si esta situación es posible (que haya dos frases, o más, que sean verdaderas). Créame que dilucidar esto por su cuenta le permitirá *resolver* el problema sin leer nada de lo que sigue.

Ahora sí, sigo yo.

Antes de dar la respuesta, quiero proponer un ejemplo que espero sea iluminador. Supongamos que fuera posible encontrar, entre las diez, por lo menos *dos* frases verdaderas. Sólo para fijar las ideas, supongamos que las frases 3 y 7 fueran las verdaderas. Esto implicaría, por un lado, que hay exactamente tres frases falsas y, por otro, que hay exactamente siete frases falsas. Ambas afirmaciones no pueden ser ciertas al mismo tiempo (¿por qué? No avance hasta no haberlo pensado un rato).

Luego, las frases 3 y 7 no pueden ser *ciertas* al mismo tiempo, porque obligarían a que el número de frases falsas fuera exactamente tres y siete, lo que no es posible.

Intente ahora con cualquier otro par, digamos las números 2 y 8. Esto implicaría que, por un lado, hay exactamente dos frases falsas y, por otro, exactamente ocho frases falsas. Esto no puede ser cierto (por las mismas razones que antes).

Como podrá advertir, el razonamiento que usé para demostrar que las frases 3 y 7, primero, y luego la 2 y la 8 no pueden ser ciertas simultáneamente se aplica a cualquier par de frases.

Con el mismo razonamiento, uno puede concluir también que no hay "más" de dos frases verdaderas, porque en principio eso querría decir que hay dos, y ya vimos que eso no puede pasar.

Por otro lado, tampoco puede ser cierto que ninguna frase sea cierta, porque si las diez frases fueran todas falsas, entonces la número 10 sería verdadera.

Estos razonamientos, entonces, permiten concluir un par de cosas:

a) No puede haber dos o más frases ciertas (porque esto lleva a una contradicción).
b) No pueden ser las diez frases todas falsas.

Luego, *tiene que haber una sola frase verdadera y nueve que son falsas.*

La pregunta que hay que responder ahora es: ¿cuál de todas las frases es *la* verdadera? Supongamos que fuera la número 7 (por elegir una cualquiera). Esto querría decir que hay exactamente siete frases falsas entre las diez. Pero de este modo habría tres frases verdaderas (las tres restantes). Y ya nos convencimos más arriba de que no puede haber más de dos frases verdaderas.

Esto debería servirnos para pensar que -quizá- lo mismo pasará con *otras frases,* si suponemos que son ciertas.

Antes de avanzar y terminar con el análisis, ¿no le dan ganas de pensar a usted, sin que yo tenga que escribir nada más? La clave de lo que pasó recién con la frase número 7 es que, al ser ella la verdadera, tiene que haber siete que sean falsas (por supuesto, no la 7). Pero además tienen que quedar dos frases verdaderas más. Y ya vimos que eso no puede suceder.

El único caso que *impide* que se produzca esa situación es elegir la frase 9 como verdadera. Así, uno sabe que hay exactamente nueve frases falsas, todas salvo la 9, que es la única verdadera.

Y eso resuelve el problema que teníamos planteado.

Problema 8
Los eslabones de una cadena de oro

El que sigue es un problema interesante porque obliga a pensar... lo cual no tiene nada de malo. Sin embargo, cuando me enfrenté con él creí que lo había resuelto casi inmediatamente, aunque había algo que me seguía intrigando. No estaba convencido de que estuviera bien.

Sabía que la solución estaba escrita en un libro (es un problema que planteó Martin Gardner hace muchos años), pero me resistía a mirarla. Por eso es que la/lo invito a que no se deje tentar por las ganas de cotejar si la solución que encontró es la ideal o no. Es decir, tómese un tiempo para buscar otras alternativas. Creo que lo mejor es contarle el problema y dejar que lo piense con tranquilidad.

Un joven está estudiando en una provincia alejado de su familia. Todos los meses, sus padres le envían una cantidad de dinero suficiente como para que pueda afrontar sus gastos.

Cierta vez, por una dificultad financiera, el dinero no llega a tiempo y, para peor, le avisan que demorará algunas semanas. Necesita encontrar la manera de pagar el alquiler de la habitación en la que duerme, y recuerda que tiene una cadena de oro con 23 eslabones.

Se le ocurre una idea y decide ponerla en práctica. Habla con la dueña del hotel y, entre ambos, concluyen que si él le da un eslabón de la cadena por día, cubre exactamente el valor diario que paga por la habitación. Y de esa forma puede solventar su estadía durante los veintitrés días. Sus padres le aseguran que el dinero llegará en algún momento durante ese lapso.

Entonces, como él sabe que recibirá el dinero, tiene la intención de arruinar su cadena lo menos posible. Es decir, prefiere hacer la menor cantidad de cortes posibles, de manera tal que cada día la señora tenga en su poder tantos eslabones como días él le adeuda.

En realidad, perfecciona un poco su idea porque advierte que, si la mujer le permite entregar un eslabón un día y al día siguiente -cuando debería entregarle otro- ella le devuelve el del día anterior y acepta canjeárselo por una combinación de dos eslabones, y así siguiendo, quizá pueda evitarse tener que cortar la cadena todos los días.

Después de explicarle su idea (para dañar la cadena lo menos posible), el acuerdo al que llega con la dueña es el siguiente: él puede darle un eslabón por día, o puede darle un eslabón el día 1, el día 2 puede pedirle ese eslabón y entregarle a cambio una pequeña cadena compuesta por dos eslabones. El día 3 puede darle un eslabón solo (que junto con los dos que ella tiene le servirían para pagar el tercer día) o puede pedirle que le devuelva los dos que ella ya tiene y entregarle un pequeño segmento (una "minicadena") con tres eslabones, y así siguiendo, día por día. Lo único que debería importarle a la dueña es tener en su poder cada día la cantidad de eslabones equivalente a la cantidad de días que el estudiante estuvo en su hotel.

Ahora viene la pregunta: ¿cuál es el mínimo número de cortes que tiene que hacer el joven estudiante para arruinar su cadena lo menos posible y honrar su acuerdo los veintitrés días?

Solución.

Me imagino que se habrá entretenido con este problema bastante tiempo. Las tentaciones son varias a lo largo del camino. Cuando uno cree haber encontrado una manera ideal de cortar la pulsera y ya se dispone a cotejar la solución, se le ocurre algo que no había pensado antes y que modifica la respuesta original. Y eso (al menos a mí) me sucedió varias veces. Fue difícil vencer la tentación de ir a mirar. De todas formas, aunque parezca antiintuitivo, quiero decir que conozco una solución que permite cortar solamente cuatro veces la cadena. Claro, la pregunta es cómo. No sé si le sorprende el número, pero puedo garantizarle que *hay* una forma de hacerlo. La voy a escribir acá abajo, pero quizá tenga ganas de seguir pensándolo ahora que sabe que hay una forma de resolver el problema *solamente* con cuatro cortes.

Supongamos que usted numera los eslabones del 1 al 23. Entonces, corte la cadena de tal manera que queden separados los eslabones que llevan los números 4 y 11. Esos dos quedan aislados. Como puede advertir, para hacerlo se necesitan cuatro cortes.

1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	**11**	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

De esta forma, con los cuatro cortes, la cadena ha quedado dividida en cinco segmentos:

Primer segmento:

1	2	3

Segundo segmento:

4

Tercer segmento:

5	6	7	8	9	10

Cuarto segmento:

11

Quinto segmento:

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

O sea, se tienen:

2 segmentos de longitud 1 (el 4 y el 11)

1 segmento de longitud 3 (el que contiene los eslabones 1,2 y 3)

1 segmento de longitud 6 (que contiene a 5, 6, 7, 8, 9 y 10)

1 segmento de longitud 12 (el que tiene 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21,22 y 23)

Ahora se trata de mostrar que uno puede construir todos los números, del 1 al 23, con esos cinco segmentos. Y aunque parezca que no, se puede. Si quiere, piénselo por las suyas. Si no, acá va lo que pensé yo.

El primer día, le lleva un eslabón (el que tiene el número 4). El segundo día le lleva el eslabón 11, que junto con el 4 hace que la señora tenga ahora dos eslabones. El tercer día le pide que le devuelva los eslabones 4 y 11 (que le había entregado los días anteriores) y le entrega el segmento de cadena formado por los eslabones 1, 2 y 3. Al cuarto día le agrega al segmento que ella tenía (1, 2, 3) el eslabón 4. De esta forma, la señora tiene cuatro eslabones. Y así siguiendo, de acuerdo con la descripción que sigue más abajo.

1) 4
2) 4 y 11
3) (1, 2, 3)
4) (1, 2, 3) + 4
5) (1, 2, 3) + 4 + 11
6) (5, 6, 7, 8, 9, 10)
7) (5, 6, 7, 8, 9, 10) + 4
8) (5, 6, 7, 8, 9, 10) + 4 + 11
9) (5, 6, 7, 8, 9, 10) + (1, 2, 3)
10) (5, 6, 7, 8, 9, 10) + (1, 2, 3) + 4
11) (5, 6, 7, 8, 9, 10) + (1, 2, 3) + 4 + 11
12) (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23)
13) (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23) + 4
14) (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23) + 4 + 11
15) (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23) + (1, 2, 3)
16) (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23) + (1, 2, 3) + 4
17) (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23) + (1, 2, 3) + 4 + 11
18) (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23) + (5, 6, 7, 8, 9, 10)...

Bonito, ¿no? E inesperado también.

Otra solución, que me propusieron tanto Alicia (Dickenstein) como Carlos (D'Andrea) y que quizá se le haya ocurrido a usted también: con cuatro cortes, al igual que en la propuesta anterior, ellos separaron los siguientes segmentos:

1, (2, 3), (4, 5, 6, 7), (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) y (16, 17, 18, 19, 20, 21,22, 23)

O sea, un segmento de un eslabón (el número 1 solo), un segmento de dos eslabones (el [2, 3]), otro de cuatro eslabones (4, 5, 6 y 7) y dos segmentos de *ocho* eslabones. Le invito a que se fije que también puede pagarle a la dueña del hotel haciendo *alguna* combinación de segmentos.
Yo escribo una acá abajo:

1 = (1)
2 = (2, 3)
3 = (1) + (2, 3)
4 = (4, 5, 6, 7)
5 = (4, 5, 6, 7) + (1)
6 = (4, 5, 6, 7) + (2, 3)...

Creo que llega a advertir lo que hay que hacer. Se lo dejo para que lo complete.
Sin embargo, aún falta algo... ¿Qué es? Convencerse de que con *tres* cortes no se puede resolver el problema. Es decir, que se necesitan cuatro (como vimos más arriba) para poder conseguir los 23 números distintos que le van a servir para pagar día por día la habitación hasta que le llegue el dinero.
Si uno hiciera sólo tres cortes (no importa dónde), eso generaría cuatro minicadenas o trozos de cadena. Fíjese que con esos cuatro segmentos se pueden formar 15 números distintos,[4] *y nada más.* ¿Por qué? Porque las combinaciones posibles con esos trozos son "nada más" que 15. Luego, no se puede llegar a los 23 que necesita el estudiante.

[4] Si uno hiciera tres cortes, la cadena quedaría dividida en cuatro trozos cuyas longitudes voy a llamar *a, b, c* y *d.* Luego, las cantidades que el estudiante puede pagar son:

a, b, c, d, (a + b), (a + c), (a + d), (b + c), (b + d), (c + d), (a + b + c), (a + b + d), (a + c + d), (b + c + d), (a + b + c + d)

O sea, 15 números. Aunque todos fueran distintos, no alcanzarían para cubrir los números del 1 al 23 que necesita el estudiante.

Moraleja: Tres cortes no son suficientes. Sí, en cambio, cuatro.[5]

[5] Carlos D'Andrea me envió esta solución que, por lo elegante, merece quedar registrada. Acá va: "Cortás un eslabón de longitud 1, otro de longitud 2, otro de longitud 4 y un último eslabón de longitud 8. El trozo que queda tiene longitud: 23 - 1 - 2 - 4 - 8 = 8. Usando los números 1,2, 4 y 8 (sumando algunos de ellos) se pueden obtener todos los números del 1 al 15. Usando la otra minicadena de 8 eslabones y agregándola a los números 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15, se obtienen los números 16, 17, 18, 19, 20, 21,22 y 23".

Problema 9
Probabilidad con dados

Con el siguiente problema le propongo un desafío. No sólo la/lo invito a que encuentre la solución, sino a que encuentre *dos formas distintas de llegar a ella.* O, si quiere, a que busque aún más.

En principio, cuando uno se enfrenta con una dificultad, la ansiedad lo lleva a tratar de sacársela de encima. Y por eso trata de resolver el problema cuanto antes. Sin embargo, esa misma ansiedad lo/nos lleva a intentar por la fuerza bruta, que no es necesariamente algo malo, sólo que suele ocupar mucho tiempo (y a veces resulta un camino tortuoso).

Por otro lado, sólo cuando uno ha logrado saltar la valla y ya está más tranquilo, puede mirar las cosas desde otra perspectiva, y es entonces cuando, inesperadamente (a veces), aparece otra solución, u otra forma de plantearla en la que el resultado se presenta más claro y natural.

Acá va (el problema):

Laura y Daniel van a tirar un dado[6] una vez cada uno. Laura tira primero. ¿Cuántos resultados posibles favorecen a Daniel? Es decir, ¿en cuántos casos Daniel saca un número mayor que el de Laura? Más aún, cuando uno obtiene este dato, ¿cuál es la *probabilidad* de que Daniel saque un número mayor que el de Laura?

Lo interesante ahora es que primero piense si entendió qué hay que resolver y, luego, se tome el tiempo necesario para hacerlo. No hay apuro. No hay presiones.

Solución 1

¿Qué sería en este caso usar la fuerza bruta? Puedo decir lo que se me ocurre a mí, pero no estoy seguro de que todos los lectores lo entiendan de la misma manera. Igualmente, lo que uno puede hacer, en principio, es *contar* cuántos casos posibles hay. Es decir, como Laura tira el dado primero y después lo hace Daniel, ¿cuáles son todos los resultados posibles?

---

[6] Estoy suponiendo que al tirar el dado todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

11, 12, 13, 14, 15, 16...

donde el primer dígito indica lo que sacó Laura y el segundo, lo que sacó Daniel. Sigo:

21,22, 23, 24, 25, 26 31, 32, 33, 34, 35, 36 41, 42, 43, 44, 45, 46 51, 52, 53, 54, 55, 56 61, 62, 63, 64, 65, 66

Por lo tanto, en total hay (cuéntelas) 36 posibilidades.
¿Qué podría hacer usted con este dato? En principio, uno podría tratar de ver, de estas 36 posibilidades, cuáles resuelven el problema. Es decir, de las 36 formas en las que pueden caer los dados, en cuántas de ellas Daniel obtiene un mejor puntaje que Laura. En este sentido, basta contar las parejas que tienen un segundo número *mayor* que el primero. En total son:

12, 13, 14, 15, 16 23, 24, 25, 26 34, 35, 36 45, 46 56

Éstos son los casos favorables, que suman 15. Y sabemos que el total es 36.

Moraleja: si uno quiere calcular la probabilidad de que aparezca uno de los casos favorables, lo que hay que hacer es dividir los casos favorables por los posibles (como se haría en la realidad al tirar un dado)[7]

Luego, la *probabilidad* de que Daniel gane es

15 / 36 = 5 / 12

[7] Probabilidad de que suceda un cierto evento

P = (cantidad de casos favorables de que suceda)/(cantidad de todos los casos posibles).

Por ejemplo, al tirar un dado, la probabilidad de que salga un número par es ½, porque la cantidad de casos "favorables" es 3 (si sale un 2, un 4 o un 6). Pero la cantidad total de casos "posibles" es 6 (1,2, 3, 4, 5 y 6). Luego, la probabilidad es 3/6 = ½

(que es aproximadamente 0,417)

¡Y ésa es la respuesta al problema! En realidad, debí haber aclarado que la de arriba es *una forma* de llegar a la solución.

Ahora, una vez resuelto el problema, le invito a que piense otra solución. Una, digamos, conceptualmente diferente. Le toca a usted. Yo vuelvo después.

Solución 2

Acompáñeme con este razonamiento. Si le preguntara cuál es la probabilidad de que *ambos* sacaran el mismo número, ¿qué me diría? Concretamente, de los 36 casos originales que contamos más arriba, ¿cuáles se ajustan a este caso?

Veamos:

11, 22, 33, 44, 55, 66

Es decir, de los 36 casos posibles, estos 6 son los favorables (para responder la pregunta). Por lo tanto, la probabilidad de que ambos saquen el mismo número se calcula como:

6 / 36

o, lo que es lo mismo: 1/6.

En algún sentido, esta forma de pensarlo *divide* los casos por la mitad. ¿En qué sentido lo digo? Es que excluyendo estos *6* casos en los que *ambos* sacaron el mismo dado, en los *30* restantes, en la mitad *tiene que ganar Laura* y en la otra mitad *tiene que ganar Daniel.* Si así no fuera, alguno de los dos tendría ventaja, y eso no es posible.

Luego, como la mitad de 30 es 15, esto significa que en 15 de los 36 casos gana Laura y en los otros 15 gana Daniel.

Moraleja: 15/36 = 5/12, por lo que encontramos una vez más lo que ya sabíamos.

Ahora podemos tratar de *generalizar* este resultado. Me explico.

Supongamos que, en lugar del dado de seis caras que tiraban Laura y Daniel, tiene ante usted un dado con diez caras. Imagine, además, que en lugar de tener un número como en los dados convencionales (del 1 al 6), los números de cada cara de este nuevo dado van del 0 al 9. O sea, cada lado corresponde a uno de los nueve dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Le propongo ahora reproducir el problema anterior.

Si Laura tirara primero este nuevo dado, y luego le tocara a Daniel, ¿cuál sería la probabilidad de que Daniel sacara un número *mayor* que Laura?

En este punto me parece que, a partir del ejemplo anterior con el dado "clásico" de seis caras, usted está en condiciones de intuir qué hay que hacer para contestar esta nueva pregunta. La/ lo dejo sola/o.

Como antes, uno podría apelar a la fuerza bruta y contar los casos posibles, luego encontrar los favorables y finalmente dividir un número por otro, tal como hicimos en el ejemplo original. Pero como el dado se modificó, las cuentas que hicimos antes ya no son válidas. Si uno mira la solución 1, lo que debería hacer es listar todos los posibles casos.

Y la tabla quedaría así:

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59
60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79
80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99

Una vez más, estos 100 casos que figuran en la lista corresponden a *todos* los posibles resultados que pueden darse al tirar dos veces seguidas un dado *de diez caras.* De todos éstos, sólo algunos sirven para que Daniel sea ganador, o sea, para que obtenga un número más grande que Laura. ¿Cuáles son?

Los resultados que figuran acá arriba son los 45 casos que dan como ganador a Daniel (porque el segundo dígito es *mayor* que el primero). Luego, la probabilidad de que Daniel saque un número mayor que Laura es (dividiendo los casos favorables sobre los casos posibles):

45/100 = 0,45

Y el problema quedó resuelto. Igual que antes, uno podría preguntarse: ¿por qué no hacer la misma elaboración que en el caso del dado común? Es decir, ¿por qué no contar en cuántos casos los dos resultados son iguales? (Piense usted cuántos son.)

Sigo: son

00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 (*)

o sea, 10 casos. Por lo tanto, de los 100 posibles hay 10 en los que el número de Laura es igual al de Daniel (*). Quedan 90 (donde los números de uno y otro son distintos). Acá podemos pensar así: de los 90 casos, aquellos en los que Laura obtiene un número mayor que Daniel tienen que ser la misma cantidad que aquellos en los que Daniel obtiene un número mayor que Laura. Por lo tanto, la mitad de los casos es 45 y, en consecuencia, la probabilidad que uno busca es:

01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09
12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
23, 24, 25, 26, 27, 28, 29
34, 35, 36, 37, 38, 39
45, 46, 47, 48, 49
56, 57, 58, 59
67, 68, 69
78, 79
89

45 / 100 = 0,45

(como ya sabíamos)

Luego, hemos resuelto el problema de dos formas diferentes.

Ahora quisiera avanzar aún un paso más. La pregunta sería ésta: ¿cuál es la probabilidad de que tengan un número *distinto* al tirar cada uno el dado de diez caras?

Para calcular esa probabilidad, lo que voy a hacer en primer lugar es recurrir a la solución ya conocida de que salgan dos números iguales (*). Ese número es

1 / 10

Como vimos, esto sucede porque los casos en los que pueden sacar el mismo número son 10 (como figura en (*)). Luego, *la probabilidad* de que tengan dos números iguales es de

10 / 100 (casos favorables / casos posibles)

o sea: 1/10.

Ahora bien: al tirar dos veces seguidas el dado, todos los resultados posibles son 100. O sea, la probabilidad de que salga algún par de números cualquiera, sin restricciones, es 1, porque en este punto los casos favorables son todos los posibles. Luego, al dividirlos, se obtiene el número 1.

Dicho con otras palabras: el 1 indica la probabilidad de que salga algún par de números del total, por lo que la probabilidad de que *algo* salga tiene que ser 1, ya que los casos favorables ¡son todos! Y por eso, al dividir los casos favorables sobre los posibles, como son los mismos, el resultado va a ser ¡1!
Pero si ahora, como sé que 1/10 es la probabilidad de que salgan dos números iguales, resto

$$1 - 1/10 = 9/10$$

lo que estoy calculando es (y lo invito a que lo piense también usted) la probabilidad de que salgan dos números distintos.
Y acá quería llegar. Hemos descubierto que la probabilidad de que salgan dos números distintos es 9/10, y lo hicimos restando del número 1 el número 1/10, que correspondía a la probabilidad de que salgan dos números iguales. Y para terminar, si 9/10 es la probabilidad de que salgan dos números distintos, la probabilidad de que el segundo sea mayor que el primero y la probabilidad de que sea menor que el primero tienen que ser equivalentes. O sea, *hay que dividir por 2* el número 9/10.

$$(9/10)/2 = 9/20 = 0{,}45$$

O sea, hemos redescubierto que este número tiene que ser 0,45.
Este ejemplo, que parece muy sencillo (en realidad lo es), ayuda a pensar algo interesante cuando uno quiere calcular la probabilidad de que suceda un evento. Algunas veces es más fácil deducir la probabilidad de que el evento *no suceda,* y luego restarla de 1. Y eso fue lo que hicimos en este caso. En general, si la probabilidad de que suceda un evento es *p,* entonces la probabilidad de que no suceda ese evento es

$$1 - p$$

Supongamos ahora que uno tuviera un dado con 50 caras (por poner un ejemplo). Imaginemos que en cada cara hay un número entre 1 y 50.

Entonces, si Laura tirara el dado una vez y Daniel inmediatamente después, ¿cuál sería la probabilidad de que Daniel sacara un número más grande?

Como usted advierte, podríamos replicar lo que hicimos más arriba en cualquiera de las soluciones. El problema es que listar todos los casos posibles es muy tedioso, puede llevar mucho tiempo y nos expondríamos a cometer múltiples errores al confeccionar la tabla.

En cambio, si uno repasa lo que hizo antes descubre que, en el caso de un dado de 50 caras:

a) Los posibles resultados al tirar dos dados de estas características son 50 • 50 = 2500.

b) Si uno quisiera calcular cuál es la probabilidad de que salgan dos números iguales, lo que tiene que hacer es dividir los casos favorables por los posibles. Los favorables son (cuéntelos usted antes de que lo haga yo acá) 50. (¿Por qué?) Porque son

1, 1 - 2, 2 - 3, 3 - 4, 4 - 5, 5 - .... - 48, 48 - 49,4 9 - 50, 50

Al dividir los casos favorables (50) por los posibles (2500) obtenemos:

$$50/2500 = 1/50$$

c) Por lo tanto, la probabilidad de que no salgan dos números iguales se calcula como:

$$1 - 1/50 = 49/50 \quad (**)$$

d) Luego, la probabilidad de que Daniel tenga un número mayor que Laura tiene que ser *la mitad* de la probabilidad que calculamos en (**), o sea,

$$½\ (49/50) = 49/100 = 0{,}49$$

Ahora (creo) está en condiciones de resolver este problema en forma general, sin importar cuántas caras tenga el potencial dado. Más: si tuviera un dado de *n* caras, la probabilidad de que Daniel tenga un número más grande que Laura se calcula así:

- 1/n = probabilidad de que tengan dos números iguales
- (1 - 1/n) = probabilidad de que tengan dos números distintos
- ½(1 - 1/n) = probabilidad de que Daniel tenga un número mayor que Laura

Si usted quiere revisar esta fórmula, haga la cuenta reemplazando el número *n* por 6, 10 y 50. En ese caso:

a) cuando n = 6, ½(1 - 1/n) = 5/12
b) cuando n = 10, ½(1 - 1/n) = 9/20 = 0,45
c) cuando n = 50, ½(1 - 1/n) = 49/100 = 0,49

Problema 10
Problemas que atentan contra la intuición

Reconozco que tengo cierta *debilidad* por los problemas que atentan contra la intuición. Es que son los que *desafían* la imaginación y nos llevan a poner a prueba lo que *creemos* que pasa con lo que *realmente* pasa.
Quiero entonces plantear dos situaciones que parecen iguales, pero que no lo son. Más aún: le invito a que se prepare para resolver los problemas dándose un poco de tiempo. No se apure. No salte inmediatamente a ninguna conclusión.
Por supuesto, si se le ocurre una respuesta *no la descarte...* Al contrario: aprovéchela para analizarla y ver si efectivamente es la más adecuada. Aquí van:

a) La señora Lidia Rodríguez tiene dos hijos. Al menos uno de ellos es un varón. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro niño sea también varón?
b) La señora Rosa Gentile tiene también dos hijos. La mayor es una nena. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro hijo sea también una nena?

Como ve, los problemas parecen similares... pero no lo son. Ahora, le toca a usted.

Solución.
Aunque lo parezcan, los problemas no son iguales. Ambas mujeres han tenido dos hijos. En ese sentido, entonces, no hay diferencias. Sin embargo, lo que se sabe de cada una es distinto. De la señora Rodríguez se sabe que uno de sus dos hijos es un varón. De la señora Gentile, que la primera fue una nena. Es decir, no es lo mismo saber que el primero fue una nena que saber que uno de los dos hijos es un varón.
Voy a analizar cada caso por separado.
a) ¿Cuál pudo haber sido la secuencia de hijos que tuvo la señora Rodríguez?

varón-varón, varón-nena, nena-varón, nena-nena

Todo lo que sabemos es que *uno* de los dos es un varón. Luego, descartamos el caso nena-nena. Quedan los otros tres:

varón-varón, varón-nena, nena-varón

¿Y ahora? Fíjese que, de los tres casos que quedan, sólo en el primero el otro niño *es* un varón. O sea, de los *tres casos,* sólo en uno la respuesta es varón. Por lo tanto, la *probabilidad de que el otro niño sea varón* es 1/3.

Es muy importante que advierta que la *probabilidad* que buscamos *no es V,* porque de los *tres* casos posibles sólo en *uno* el otro niño resulta ser un varón.

b) ¿Cuál pudo haber sido la secuencia de hijos que tuvo la señora Gentile? A diferencia de lo que pasaba en el caso anterior, sabemos que las posibles secuencias pudieron haber sido:

nena-nena, nena-varón

Es que *ahora* sabemos que la primera fue una *nena.* Es decir, hay solamente *dos* casos posibles (y no tres como en la situación anterior). Por lo tanto, si uno quiere *calcular* en cuántos casos el otro niño pudo haber sido una nena, deduce que *hay solamente un* caso en el que eso sucede: nena-nena. Luego, la probabilidad es de uno en dos, o sea *Vt.*

Como se ve en estos dos ejemplos y preguntas, en un principio surge la tentación de contestar que ambos casos son iguales. Sin embargo, esto no es cierto (y lo verdaderamente interesante es que usted mismo se convenza). O sea, saber que el primer niño fue una nena dice mucho con respecto a la pregunta formulada. En cambio, saber que uno de los dos fue un varón (sin indicar el orden en que nació) implica que hay más posibilidades para analizar. De ahí la diferencia en el resultado.

En todo caso, el modelo que uno tiene en la cabeza no contempla “el orden” de los hijos, sino solamente el sexo. En cambio, cuando en el segundo problema aparece en consideración “mayor-menor” (por el orden en que fueron naciendo los hijos), uno se convence de que en el primero la probabilidad es 1/3 y no 1/2.

Problema 11
Un señor camina a 3 kilómetros por hora a la ida y a 4 a la vuelta

Un señor camina hacia la casa de un amigo a 3 kilómetros por hora, toca el timbre y advierte que su amigo no está. Da la vuelta y retorna al lugar de partida caminando más rápido, a 4 kilómetros por hora. El viaje, en total, le insume 21 horas. ¿Cuántos kilómetros caminó?

Solución.
Quiero calcular cuántos kilómetros recorrió el señor. Supongamos que *A* es la distancia entre la casa del señor que camina y la casa del amigo. O sea, 2A es la distancia total que recorrió el señor que visita a su amigo.
Como caminó hasta la casa a 3 kilómetros por hora (3 km/h), eso significa que en una hora recorrió 3 kilómetros.

3 kilómetros __________ 1 hora
A kilómetros __________ x horas **(*)**

Por otro lado, al caminar de regreso a su casa, lo hizo a una velocidad de 4 km/h. Es decir:

4 kilómetros __________ 1 hora
A kilómetros __________ y horas **(**)**

De los planteos (*) y (**), se deduce que:

$$x = A / 3$$

Y también:

$$y = A / 4.$$

Luego, que el señor haya caminado *x* horas de ida e *y* horas de vuelta significa que recorrió

A / 3 + A / 4 = 21 (por lo que dice el planteo)

Luego, despejando...

$$A / 3 + A / 4 = (4A + 3A) / 12 = 21$$

Por lo tanto,

$$(4A + 3A) = 12 \bullet 21,$$

$$7A = 12 \times 21 \quad A = (12 \times 21) / 7 \quad A = 12 \times 3 = 36$$

Luego, como caminó *A* kilómetros de ida, y lo mismo de vuelta, la respuesta final es que el señor recorrió 72 kilómetros en 21 horas.

Problema 12
Cortar la torta entre tres comensales

Le propongo pensar el siguiente problema. Hay una torta y tres personas dispuestas a comerla. Ninguno quiere comer menos que los otros. Y no hay forma de "medir" para saber con exactitud cómo generar tres porciones iguales, por lo que hay que elaborar una estrategia que permita que los tres queden satisfechos. ¿Cómo hacer?

Este problema, que parece totalmente *irrelevante,* puede adquirir impensada actualidad. Por ejemplo, si tres países se disputan una porción de tierra, ¿cómo hacen para dividirla de manera tal que no se genere un conflicto entre ellos? También puede suceder que haya que distribuir una herencia entre tres personas y lograr que la operación deje contentos a todos.

Estoy seguro de que usted puede aportar más y mejores ejemplos. Pero lo que surge de estos casos es que lo que parece totalmente *inocuo e irrelevante* en realidad sólo lo es en el contexto de tener que cortar una torta, ya que, en otro escenario y en otras condiciones, tener una estrategia que satisfaga a todos los involucrados ya no es algo tan trivial. Y aunque mucha gente no lo perciba, elaborar esa estrategia también es hacer matemática.

El problema de la torta es un *clásico dentro de la matemática.* Hay mucha literatura escrita y soluciones de diferente tipo. Yo voy a presentar sólo una de ellas, que no es necesariamente la mejor. Es sólo *una* de las tantas que se conocen. Y, por supuesto, no es una idea mía, sino una respuesta que circula desde hace mucho tiempo.

Antes de dejarla/o que reflexione, quiero proponerle -para empezar- que piense un problema un poco más sencillo. Algo muy parecido al planteo original, sólo que en lugar de suponer que hay *tres personas* para comer, se trata, en principio, sólo de *dos.* Es decir, hay que dividir la torta en dos porciones que dejen contentos a los comensales.

La idea es tratar de cortarla de manera que la división sea "justa", en el sentido de que ninguno de los dos tenga nada para objetar. ¿Cómo hacer? La solución es relativamente sencilla. (¿Quiere pensarla por su lado?)

La idea es que uno de los dos comensales se ocupe de *cortarla en dos partes* y el *otro* decida con cuál de las dos porciones se queda. Ésta parece una solución justa, equitativa: "Uno corta, el otro elige".

Ahora vuelvo al problema original: si en lugar de dos comensales hay que distribuirla entre *tres,* sin que ninguno pueda reclamar nada, ¿cómo conviene hacer?

Acá la/lo dejo pensar a usted. Se trata entonces de elaborar una estrategia que *deje contentos a todos.* No es fácil. Pero tampoco imposible.

Solución.

Voy a llamar *A, B* y *C* a los tres comensales. Le pido un favor: lea con cuidado lo que sigue y no se conforme con entender lo que dice. Piense si está de acuerdo con lo que se afirma, y si lo siente o percibe como una división justa.

Para empezar, uno de los tres corta la torta. Le damos esa responsabilidad a A. Como *A* es quien la cortó, y se supone que lo hace con el mayor cuidado posible tratando de ser justo en la división*,* uno podría dejarlo para el final cuando haya que elegir. Es decir: una vez que hayan elegido sus porciones *B* y *C*, *A* se quedará con la última. Y eso no debería generarle ningún conflicto, porque *A* debió de tomar todas las precauciones como para que, en caso de que él fuera el último en elegir, todos los trozos -que hizo de acuerdo con su apreciación- fueran iguales. Es importante señalar esto porque la discusión pasará por saber qué hacen *B* y *C* con la torta. La estrategia sigue así: dejamos que *B* mire primero la torta. Si él supiera que va a ser el primero en elegir, entonces no debería preocuparle si la división que hizo *A* fue justa o no. *B* elegiría primero y listo. Pero todavía no lo sabe. Entonces, como podría ser que *B* tuviera que elegir segundo, uno le propone que siga estos dos pasos:

Primer paso: Si *B* viera que hay dos porciones igual de grandes (y más grandes que la tercera porción), de modo que si él elige en segundo lugar no tendrá que quedarse con una porción más chica, no debería importarle dejarlo elegir primero a *C.* Entonces, en este caso, el orden de la elección sería:

Primero elige C

Segundo elige B

Último elige A

Segundo paso: Podría pasar que *B* no estuviera cómodo eligiendo en segundo lugar, porque podría pensar que *C* va a quedarse con la porción más grande. Es decir, *B* advierte que hay una porción más grande que las otras dos y, por lo tanto, supone que, si él tiene que elegir segundo, *C* va a llevarse la mejor parte. En este caso, uno le pide a *B* que marque las dos porciones que él considere más chicas y que le ceda la decisión de qué hacer a *C*.

Pero *C* -obviamente- no elige primero, sino que inspecciona la torta, como hizo antes B. Si él se siente cómodo con la opción de elegir segundo (o sea, le parece que hay al menos dos porciones igualmente grandes y por lo tanto no le importa que *B* elija antes), el orden será entonces el siguiente:

B elige primero

C elige segundo

A elige último

Pero podría suceder que a *C* le pasara lo mismo que a *B* (que tuvo que marcar las dos porciones más chicas). O sea, que *C no quiera* elegir segundo. ¿Por qué podría ocurrir esto? Porque *C* podría creer que hay una porción más grande que las otras, y que si él elige segundo, *B* va a llevársela. Entonces, igual que en el caso anterior, uno le pide a *C* que marque las que cree que son las dos porciones más chicas.

Un breve resumen. Se llegó a esta situación porque tanto *B* como *C* no aceptaron elegir segundos, y eso desembocó en que marcaran lo que para cada uno de ellos eran las dos porciones más chicas. Como cada uno marcó dos de las *tres* porciones, debieron coincidir en al menos *una* de ellas como la más chica (piense usted por qué sucede esto).

Ahora ya falta muy poco. Justamente *esa* porción que los dos coinciden en ver como la más chica es la que separan y le dan a A. Obviamente, *A* no puede decir nada porque fue quien cortó la torta originalmente.

Ahora quedan sólo dos porciones. Y también quedan sólo *dos* comensales: *B* y *C.* Entonces se juntan las dos porciones, como si formaran una nueva torta, y proceden como en el caso de los dos comensales que planteé al principio: *B* corta allí donde él considera que es la mitad, y *C* elige primero. O al revés: *C* corta la torta en dos y *B* elige primero.

Esto pone punto final a la distribución. No importa cómo hayan sido los cortes originales de *A*, la estrategia pone a los tres en igualdad de condiciones. Y de eso se trataba, de evitar un conflicto y de ser justos en la repartición.

Este modelo de la matemática es obviamente utilizable en cualquier situación de la vida cotidiana que requiera una partición equitativa en tres.

Preguntas finales: si en lugar de haber dos o tres comensales hubiera más, ¿cómo se haría? ¿Hay una estrategia también para esos casos? La respuesta es que sí, la hay, pero escapa al espacio que tengo aquí para desarrollarla...

Problema 13
Velocidad promedio

El problema que sigue tiene, una vez más, el condimento de lo antiintuitivo. Por supuesto, como usted está leyendo esta introducción, no bien se detenga en lo que se pide resolver tratará de "ignorar" su primera reacción. Le pido que no lo haga. Déjese llevar por lo que le parece que pasa... y verifique o ponga a prueba su respuesta. Discútala con usted misma/o hasta convencerse de que o bien el resultado que encontró es correcto o bien contiene algún error.

Una persona sale de su casa y hace un determinado recorrido a una velocidad de 6 kilómetros por hora. Cuando llega al final, da la vuelta y disminuye la velocidad a 4 kilómetros por hora, hasta que regresa a su casa. ¿Cuál es la velocidad promedio que utilizó en ir y venir?[8]

Acá lo dejo. No avance con lo que sigue hasta no haberse dado la oportunidad de pensar la respuesta.

Quiero hacerle un par de preguntas (y no sabe cuánto me gustaría estar cerca de usted para que podamos discutir las respuestas):

a) La solución que encontró, ¿fue que la velocidad promedio era de 5 km/h? (Si es así, contiene un error. Revísela y luego pensemos juntos por qué.)
b) ¿Se preguntó si el resultado depende del trecho que esta persona tiene que recorrer? En todo caso, la respuesta es que *no depende* de la longitud del camino.

Solución.

Pensemos juntos este caso particular. Supongamos que el camino que tiene que recorrer esta persona es de 24 kilómetros (sólo por poner un ejemplo). ¿Quiere pensar cuánto tiempo tardará en recorrerlo con las velocidades que indica el problema?

---

[8] La velocidad (promedio) que lleva un vehículo o una persona o cualquier móvil se calcula dividiendo el "espacio recorrido" por el "tiempo utilizado en recorrerlo". Por ejemplo, si un auto recorre 200 kilómetros en 4 horas, entonces la velocidad promedio es de 50 kilómetros por hora (50 = 200/4).

Si a la ida va a una velocidad de 6 km/h, como tiene que recorrer 24 kilómetros, tardará 4 horas. Pero al volver camina a 4 km/h. Como tiene que recorrer otros 24 kilómetros, tardará 6 horas. En total, tarda 10 horas (4 a la ida y 6 a la vuelta) para recorrer los 48 kilómetros (24 en cada trecho).

Luego, si esta persona tarda 10 horas en recorrer 48 kilómetros, su velocidad *promedio* es de... ¡4,8 km/h! En consecuencia, haber discutido este ejemplo muestra que, al menos en este caso, la velocidad promedio no es de 5 km/h, sino de 4,8.

Ahora, otra pregunta: ¿la respuesta dependerá de la longitud del camino? Si en lugar de haber recorrido 24 kilómetros esta persona hubiera recorrido 48 kilómetros (como se dará cuenta, elijo a propósito números que sirvan para hacer más sencillas las cuentas), entonces:

1. Para hacer los primeros 48 kilómetros tardará (a 6 km/h). 8 horas.
2. Para hacer de vuelta los mismos 48 kilómetros, pero ahora a 4 km/h..., tardará 12 horas.

En total, para hacer los 96 kilómetros (48 de ida y 48 de vuelta) tardará 20 horas.

En consecuencia, su velocidad promedio es

$$\mathbf{96 / 20 = 4{,}8\ km / h}$$

O sea, la velocidad promedio vuelve a ser la misma que en el ejemplo anterior. Si bien hay muy pocos datos aún, uno tiene derecho a sospechar que esta velocidad no depende de los kilómetros recorridos. Veamos mejor esta suposición.

Imaginemos que el camino a recorrer es de *x* kilómetros. Luego, el señor tiene que recorrer *x* kilómetros a la ida y *x* kilómetros a la vuelta. En total, 2x kilómetros. ¿Cómo hacer para calcular el tiempo que tarda a la ida? Si tiene que recorrer *x* kilómetros a 6 km/h, lo que hay que hacer entonces para calcular el tiempo es:

$$\mathbf{x / 6 \qquad (*)}$$

Por otro lado, para recorrer los *x* kilómetros otra vez, pero ahora a la vuelta, como su velocidad es de 4 km/h, el tiempo que tardará es:

$$x / 4 \quad (**)$$

Luego, si uno quiere calcular el tiempo total entre *ida y vuelta* tiene que sumar (*) y (**). En consecuencia, el tiempo que tardó es

$$x / 6 + x / 4 = x(1/6 + 1/4) = (5/12)x \quad (***)$$

Por lo tanto, esta persona tarda (5/12)x horas en recorrer 2x kilómetros (recuerde que son *x* kilómetros de ida a los que hay que agregarle *x* kilómetros de vuelta). Luego, la forma de calcular la velocidad promedio (así como hicimos en los dos ejemplos iniciales) es:

$$\frac{2x}{(5/12)x} \qquad (****)$$

Esta fórmula resulta de dividir 2*x* kilómetros por (5/12) *x* horas. Luego, el resultado obtenido en (****) es igual a:

$$24 / 5 = 4,8$$

Moraleja: Como se ve en la ecuación (****), el número x (que indica los kilómetros a recorrer) aparece en el numerador y denominador, por lo que terminan cancelados, y eso independiza el resultado de la longitud del recorrido. Por lo tanto, la velocidad promedio es de 4,8 km/h, *sea cual fuere el valor de x.*

Este problema -que atenta contra la intuición que nos lleva a pensar que la velocidad promedio debería ser 5 km/h- puede explicarse de diversas maneras. Veamos primero un ejemplo.

Supongamos que un auto recorre una cierta distancia a 100 km/h. Luego reduce su velocidad a la mitad, y avanza a 50 km/h. Si el auto recorre primero una hora a 100 km/h y luego la siguiente a 50 km/h, ¿cuál fue su velocidad promedio en esas dos horas?

En este caso, como recorrió 100 kilómetros en la primera hora y 50 en la segunda, en dos horas recorrió 150 kilómetros. Luego, su velocidad promedio en esas dos horas sí resulta ser el promedio de las velocidades, o sea:

150 km / 2 h = 75 km / h

En este caso sí sucede lo que uno sospecha. Es decir, en el problema que figura más arriba lo que es constante es la *distancia x,* mientras que acá lo que se mantiene constante es el *tiempo* (una hora en cada caso).

En forma más general, si el auto avanza a *A* km/h en la primera hora, y luego a *B* km/h en la segunda, entonces, después de dos horas recorrió

(A + B) km

Luego, su velocidad promedio es

(A + B) / 2 km / h

Ahora sí funciona lo que uno creía en el problema original.

Una vez que haya leído toda esta sopa de letras, no se deje amilanar. Revise los dos problemas por separado y trate de pensar y de encontrar las diferencias entre uno y otro, ya que eso es lo que le dará sentido al tiempo que le dedicó.

Problema 14
¿Hasta dónde usamos los datos?

El problema que sigue es verdaderamente fascinante. Y lo es porque cuando uno *cree* que no puede responder la incógnita, que no alcanzan los datos, que tiene que haber algún truco... cuando uno, en definitiva, está a punto de rendirse, aparece *algo* que no pensó, no consideró.

Ése es el valor de este problema: ponernos en una situación en la que creemos que no hay salida y, sin embargo, descubrimos que sí la hay. Y eso significa que abrimos un camino, exploramos algo que no habíamos visto antes y que quizás, alguna vez, nos resulte útil. Quiero aclarar que este problema me fue sugerido por Carlos Sarraute, uno de los mejores (y más entusiastas) alumnos que tuve en la Universidad de Buenos Aires. Acá va.

Suponga que estoy con dos amigos, *A* y B. Me acerco al oído de *A* y le digo un número (que obviamente *B* no escucha). Y hago lo mismo con *B*: le digo al oído un número (que ahora *A* no escucha). Ambos son números enteros y positivos.

Una vez hecho esto, digo (en voz alta) dos números: el primero es la suma de lo que les dije a los dos y el segundo es un número cualquiera, elegido al azar.

El problema consiste en lo siguiente: *A* y *B* tienen que poder *deducir* qué número tiene el otro. ¿Cómo?

El procedimiento es el siguiente: primero le pregunto a *A* si, en función de los datos que tiene, sabe cuál es el número de *B*. Si lo sabe, lo dirá, y tiene que poder *explicar* cómo lo dedujo. Y ahí termina el problema (ya que si *A* pudo descifrar qué número tiene *B*, ya no tiene sentido avanzar). En cambio, si no lo sabe, dirá, lógicamente: “No sé”. Y en ese caso el proceso continúa con B.

La secuencia se repite: le pregunto a *B* si él puede deducir (con los datos que tiene) cuál es el número de *A*. Podría suceder que *B* tampoco pudiera contestar. En ese caso, le vuelvo a preguntar a *A*. Y así siguiendo.

Por supuesto, el problema termina cuando uno de los dos *deduce* el número del otro, o cuando el número de idas y vueltas termina por cansarnos a todos.

Algo más: está claro que no se trata de "adivinar" el número del otro, sino de poder *deducirlo,* sosteniendo la respuesta con algún razonamiento capaz de explicarla.

En resumen, *A* y *B* tienen como dato un número que el otro no conoce. Los dos escuchan (porque yo los digo en voz alta) dos números, de los cuales uno corresponde a la suma y el otro es un número cualquiera. El problema consiste en que cada uno de ellos *deduzca* el número del otro.

Voy a proponer un ejemplo sencillo, y lo invito a que me siga en la argumentación, que vale la pena -créame- porque lo llevará a pensar algo muy interesante que desafiará su intuición.

Supongamos que le digo en el oído a *A* el número 15, y a *B* otro número (que por ahora no escribo acá, de manera tal que podamos pensar juntos cómo hacer). Eso sí, en voz alta digo: 17 y 25.

Empiezo preguntándole a *A*. *A* piensa un rato, pero dice "No sé", porque podría ser que *B* tuviera 2 o 10. (¿Entienden por qué? Es que *A* tiene 15, y si los dos números que yo dije en voz alta son

17 y 25, *B* podría tener o bien 2, o bien 10.) Como *A* dijo que no sabía, le pregunto a B, y *B* también dice "No sé". Entonces vuelvo a preguntarle a A, y *A* dice esta vez: el número que tiene *B* es 10.

¿Cómo hizo? ¿Cómo supo *A* que el número de *B tenía* que ser el 10? Ahora lo dejo a usted. Créame que no hay trampa.

Solución.

Analicemos juntos la situación. *A* tiene el 15; *B,* no sabemos. Los números que ambos escucharon son 17 y 25. Cuando le pregunto primero a A, dice que no sabe (porque *B* podría tener el 2 o el 10). Le pregunto ahora a B, y también dice que *no sabe.*

Pero ahora algo cambió: *A* sabe que *B* no pudo contestar. Y ése es un dato que no tenía cuando le preguntaron la primera vez. ¿Cómo dar sentido a este dato nuevo?

Fíjese ahora que usar esa información (que parece menor, porque lo único que cambió es que él escuchó decir a *B* que no sabía) le permitirá a *A* concluir que *B* tiene el 10. ¿Cómo hace?

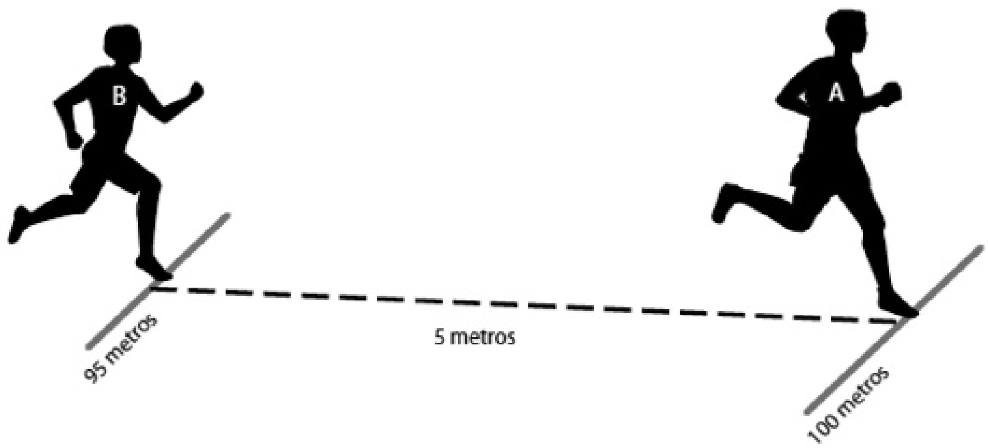
A piensa: si *B* hubiera tenido el 2, ante mi falta de respuesta debería haber advertido que tengo el 15 y no el 23. Porque si yo hubiera tenido el 23, desde el principio habría sabido que *B* tenía el 2, ya que él no puede tener un número negativo (el -8 en este caso). Como *B* no hizo ese razonamiento -de hecho no pudo concluir mi número-, no debe tener el 2 sino el 10.

Por supuesto, éste es sólo un ejemplo. La/lo invito a pensar casos en los que no sea posible encontrar la solución (que los hay), aunque hay otros, como el que acabamos de ver, que parecen imposibles de deducir y finalmente se resuelven.

Y sólo de eso se trata: de disfrutar pensando... aun lo que parece inabordable.

Problema 15
Dos hermanos y una carrera de 100 metros

Supongamos que dos hermanos, *A* y B, corren una carrera de 100 metros. *A* es el mayor y, si bien *B* se esforzó tanto como pudo, al final *A* le ganó por 5 metros. Es decir, cuando *A* llegó a la meta, *B* quedó exactamente 5 metros detrás de él.



Como *B*, el menor de los dos, se queda preocupado, *A* le propone lo siguiente para tratar de compensar la diferencia: "Hagamos una cosa: corramos de nuevo, pero esta vez te voy a dar 5 metros de ventaja. O sea, empezás en el mismo lugar que la otra vez, pero yo voy a salir 5 metros detrás tuyo".

En definitiva, la idea de *A* es que, en lugar de correr 100 metros los dos, él va a correr 105, mientras que el hermano menor, B, correrá la misma distancia que antes. *A* le está dando a *B 5 metros de ventaja.* De esa forma, piensa A, estarán parejos...[9]

Las preguntas que surgen ahora son las siguientes: ¿la situación es efectivamente como supone *A*? ¿Quién ganará la carrera esta vez? ¿Van a empatar? ¿Ganará *B?* ¿O volverá a ganar A?

[9] Aunque no lo expliqué, se supone (idealmente) que los dos hermanos corren *ambas carreras* a la misma velocidad, con el mismo empuje, la misma fuerza, etc.

Solución 1.

Antes de escribir la solución quiero proponerle algo más: como expliqué en el planteo, mientras *B* sigue corriendo 100 metros, *A* pasa a correr 105. Pero lo invito a pensar lo siguiente: cuando *A* haya recorrido 100 metros, ¿en qué lugar estará ubicado B?

Como seguramente advertirá, cuando *A* corrió 100 metros, *B* llegó a 95. Pero como *A* salió 5 metros atrás, entonces, ¡ambos están igualados al llegar allí!

Y justamente eso es lo que va a terminar de contestar la pregunta inicial: ¿quién gana ahora? (Le propongo que piense un ratito.)

Sigo yo. *A* sigue ganando la carrera, porque, luego de los 95 metros, ¡todavía faltan 5 metros más por correr! Y si bien 5 metros son pocos, todavía alcanza para que *A* le gane a *B* otra vez.

Moraleja: Los 5 metros que *A* le dio de ventaja a *B* con la idea de igualar las posibilidades no alcanzan. *A* volverá a ganar la carrera. No lo hará con tanta ventaja como antes (5 metros), pero ganará otra vez.

Solución 2.[10]

Lo interesante de este problema es que ahora sabemos que 5 metros de ventaja no fueron suficientes. ¿Cuántos harán falta, entonces? Éstos son los datos que tenemos:

- Cuando *B* corre 95 metros, *A* corre 100 metros.
- Cuando *B* corre 100 metros, *A* corre *x* metros

¿Cómo calcular x? Una manera posible es usar una sencilla regla de tres (o de "proporcionalidad"):

$$\begin{array}{r l} 95 & \text{\_\_\_\_\_\_}\ 100 \\ 100 & \text{\_\_\_\_\_\_}\ x \end{array}$$

Luego,

$$x = (100 \times 100) / 95 = 105{,}263 \text{ (aprox.)}$$

Como se ve en este cálculo, cuando *B* corre 100 metros (o sea, exactamente los 5 metros que le hacían falta para llegar a la meta), *A* ya corrió 105,263 metros. Esto contesta la nueva pregunta: *A* tendría que darle a *B* una ventaja de 5,263 metros (aproximadamente) para que llegaran juntos a la meta.

O, si usted quiere, se puede calcular al revés: ¿cuántos metros llegó a recorrer *B* cuando *A* llegó a la meta (de los 100 metros)? En ese caso, usando también la misma regla de tres, tendríamos lo siguiente:

$$\begin{array}{r l} 100 & \text{\_\_\_\_\_\_}\ 95 \\ 105 & \text{\_\_\_\_\_\_}\ x \end{array}$$

(Y pongo 105 porque ésos son los metros que recorre A, ya que le dio 5 metros de ventaja a B.) En ese caso,

---

[10] Manu Ginóbili fue quien me sugirió esta variante del problema.

$$x = (105 \times 95) / 100 = 99{,}75$$

Luego, advierta que cuando *A* llega a la meta *B* todavía no ha alcanzado los 100 metros. Ha recorrido 99,75 metros.

Un apéndice sobre la carrera de 100 metros

Una pregunta más: si en el preciso momento en que *A* llega a la meta, o sea, luego de cubrir los 100 metros, *B* está apenas en los 50 metros, ¿cuánto más rápido, según usted, iba *A* respecto de *B*? (Piénselo antes de seguir leyendo.)

La respuesta es que *A* iba al *doble* de la velocidad de *B.* Si bien es algo *sencillo* de contestar, yo preguntaría otra vez: ¿cómo lo sabe? Y uno debería responder: porque 100/50 = 2. Es decir, para determinar cuánto más rápido va uno respecto del otro hay que dividir las velocidades de cada uno, o bien las distancias que recorrieron en el mismo tiempo (en este caso 100/50). Ese *cociente* es el que establece quién se desplaza a mayor velocidad.

Por otro lado, uno podría hacer *al revés:* dividir la cantidad de metros que recorrió *B* por la cantidad de metros que recorrió *A*, y en ese caso obtendría:

$$50 / 100 = ½$$

por lo que la conclusión sería que *B* corre a la *mitad* de la velocidad de *A*.

Ahora bien, en el caso de la carrera original, considerando que cuando *A* recorrió 100 metros *B* había recorrido 95, el *cociente de ambos números* (100/95 = 1,052163...) indica que *A* iba 1,052163... veces más rápido que B.

Esto significa que, para calcular *qué ventaja* le tiene que dar *A* a *B* para que lleguen empatados, hay que establecer cuántos metros recorre *A* cuando *B* alcanza los 100 metros. Y entonces, como

$$A / B = 1{,}0526315\ldots, \text{ cuando } B = 100,$$

se tiene:

A / 100 = 1,0526315.

Por lo tanto,

A = 100 x (1,0526315.) = 105,26315

O sea, *A* recorrió 5,26315 metros más que B, *¡y ésa es la ventaja que le tiene que dar para que terminen empatados!*
Hay algo más: quisiera invitarla/o a un recorrido imaginario y le pido que se tome el tiempo para pensar (y disfrutar) de lo que sigue.
Como habrá advertido en el problema original, para llegar empatados a la meta no es suficiente que *A* le conceda a *B* 5 metros de ventaja. *A* tiene que darle *más* ventaja, 5 metros no alcanzan. Tampoco 5,1 metros (ya que, como vimos más arriba, *A* le saca una ventaja de 5,2631... metros). Ni siquiera una ventaja de 5,2 metros, ni de 5,21 metros, ni de 5,216 metros. Es decir, *A* sigue ganando la carrera aun concediendo esas ventajas.
Lo interesante es que en *un punto* eso cambia. Justamente, si *A* le da de ventaja 5,2631 metros. Pero, si le diera más, pasaría lo contrario: en ese caso *A perdería* la carrera. O sea, *A* puede dar ventajas tan grandes como quiera, *siempre y cuando sean menores que 5,2631... metros.* Éste es un punto de quiebre, a partir del cual, si da más ventaja, *pierde*.
Sucedería lo mismo si uno empezara al revés y se propusiera pensar, por ejemplo, qué pasaría si *A* le diera 10 metros de ventaja. Entonces, como vimos, perdería la carrera. También la perdería si la ventaja fuera de 9 metros, u 8, y así siguiendo: *A* perdería *siempre* la carrera si otorgara más ventaja que 5,2631 metros.
O sea, uno podría haber encontrado ese punto aproximándose por *defecto* o por *exceso,* dando menos o más ventaja. Uno podría empezar dando 5 metros de ventaja, y por otro lado, dando 10. En el primer caso, *A* ganaría igual. En el segundo caso, perdería. Sabiendo eso, podemos hacer aproximaciones cada vez mejores, por *arriba* y por *abajo.* Al final de ese proceso, *terminaría encontrando el punto* de quiebre. O sea, el punto en el que empatan.

Este método es muy utilizado en matemática para *aproximar* un punto que uno no conoce. Puede que no lo encontremos *con exactitud,* pero sabremos entonces que lo *encerramos* entre dos números, y eso es más que suficiente en ciertos casos. Dependerá de la precisión con la que uno quiera encontrar ese punto.

Problema 16
Dos millones de puntos

Son muchos los problemas que ponen a prueba a una persona. Y por "poner a prueba" no me refiero a los problemas que permiten saber cuán buena es la persona, sino a los que sirven para estimularla, para desafiarla, para "mejorarla" (si es que puedo usar esta palabra).

Suele pasar que, cuando uno se enfrenta con este tipo de situaciones, se siente tentado de pensar que "faltan datos", o que "es muy difícil", o que "esto no me va a salir", o peor aún: "¡esto no es para mí!".

Lo interesante es que la mayoría de las veces todos esos argumentos suelen esconder el *miedo al fracaso,* tan instaurado en la sociedad. Es decir, se considera un fracaso que alguien *no pueda* resolver algo cuando, en realidad, la palabra *fracaso* no cabe en estas circunstancias (y me gustaría encontrar alguna en la que *sí* fuera la adecuada). Pero en principio es preferible *escudarse* detrás de alguno de los argumentos mencionados antes que aprender a disfrutar el trayecto que involucra *pensar* en algo, *discutirlo internamente,* buscar alternativas, caminos que parecen inconducentes, relaciones que uno no sospechaba... Hasta que, o bien uno decide que ha invertido suficiente tiempo y ya no da para más, o bien encuentra algunos resultados parciales, o bien da con la solución.

Con estas reflexiones quisiera introducir un problema muy bonito que leí en un libro del matemático norteamericano Charles W. Trigg,[11] a quien corresponde todo el mérito de lo que sigue.

En sí mismo es un problema sencillo y fácilmente comprensible. Lo que sucede es que, al leerlo, aunque uno entienda lo que debería hacer, hay dos cuestiones que no parecen posibles:

- Que lo que se afirma sea cierto. Es decir, uno *duda* de que el problema tenga solución.

[11] El libro en cuestión se llama *Mathematical Quickies* (Dover, 2000). Lo único que voy a hacer es transcribirlo para ampliar el número de personas que puedan acceder a disfrutarlo.

- Aun suponiendo que fuera cierto, ¿qué hay que hacer para convencerse, y convencer a los otros, de que *es verdad* aunque no lo parezca?

Dicho todo esto, primero voy a enunciar el problema y luego haré algunas reflexiones antes de dejarlo para que lo piense tranquila/o.

Dice así: "Supongamos que tenemos un círculo de 10 centímetros de diámetro. Dentro de él, marcamos *2 millones de puntos.* Convénzase (y convénzame) de que, no importa *cómo* estén distribuidos esos puntos, *siempre se puede trazar una recta que deje 1 millón de puntos de un lado y 1 millón de puntos del otro".*

Antes de avanzar: está claro que *nunca en la vida* uno se enfrentará con un problema de estas características. O sea, la situación es puramente teórica, de nula aplicación *práctica*. Sin embargo, es posible resolverlo. El asunto es: ¿cómo hacer?, ¿qué hacer?, ¿por dónde abordarlo?

Ahora le toca a usted. Mientras tanto, me retiro al lugar de las respuestas. Allí lo espero.

Solución.

En lugar (y antes) de que yo escriba una solución, le propongo que piense lo siguiente: el hecho de haber elegido 2 millones de puntos es algo arbitrario. Podrían haber sido 20 puntos o 20 millones. No importa, ya que no depende de eso que el problema sea cierto o falso. Podríamos haber empezado con *cualquier número par de puntos.* Entonces, le propongo que en principio analicemos casos particulares con muchos menos puntos: digamos 2, 4, 8, 10, 40... Elija usted un número cualquiera y fíjese qué sucede. Eso sí: tiene que ser un número *par* de puntos, para que sea posible dejar una mitad de cada lado de la recta.

Además, como el problema parece falso, uno tiene la tentación de decir: "Yo voy a dibujar ahora 50 o 100 puntos dentro de un círculo para demostrar que no hay manera de dibujar una recta que deje 25 de un lado y 25 del otro". Estoy tratando de decirle que haga de cuenta que va a *poner a prueba* lo que se afirma encontrando una distribución de puntos que revele que el problema es falso. Inténtelo y fíjese qué sucede. Eso lo ayudará a comprender por qué el problema es cierto.

Dicho esto, voy a pensar con usted la solución. Voy a empezar con un caso un poco más sencillo, para que nos convenzamos de que se puede hacer.
Tomemos primero 6 puntos. Distribuyámoslos de cualquier forma (vea la figura 1).

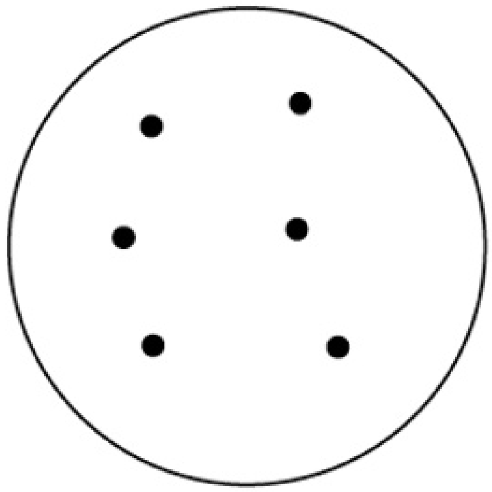


Figura 1

Como se ve en la figura 2, yo dibujé *dos* rectas que separan tres puntos de cada lado.

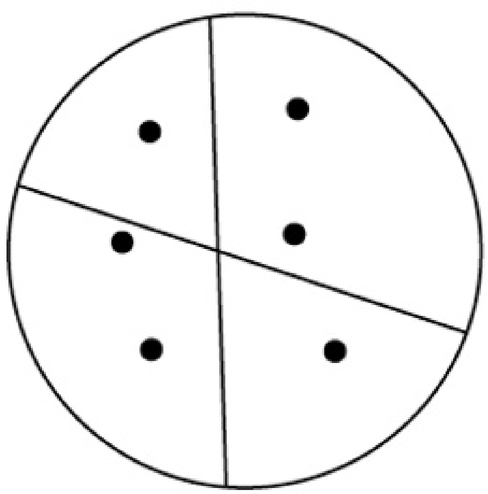


Figura 2

Algo importante: no hace falta que me siga a mí. Haga *sus propias construcciones y disfrute de buscar una recta que separe tres puntos de cada lado.* Estoy seguro de que *siempre podrá hacerlo, independientemente de la distribución de los puntos.*

Ahora, en lugar de 6 puntos, marque 10 o 20. Estoy seguro de que siempre va a encontrar una recta que separe los puntos en mitades (vea la figura 3 para el caso de los 10 puntos).

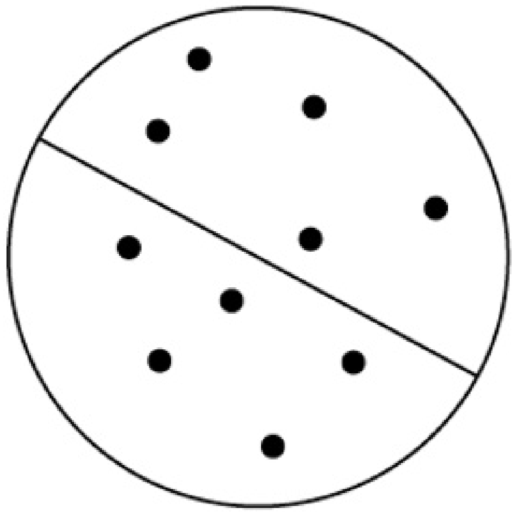


Figura 3

Pero todo esto *no es suficiente.* Es decir: el hecho de que usted (y yo) podamos resolver el caso de 6 o 10 puntos (o de 20) suscita estas preguntas:

- ¿Quién dijo que *siempre* se puede para 6, 10 o 20 puntos? En todo caso, lo único que vimos hasta acá es que, al menos en los casos que hemos analizado (descuento que usted pudo hacerlo siempre también), el resultado es cierto. Pero ¿y si viene otra persona y encuentra otra distribución de los puntos? ¿Cómo sabemos que *siempre* se va a poder?
- ¿Cómo se resuelve un problema de estas características, en el que hay que probar que algo sucede *cualquiera sea la distribución de los puntos*? ¿Qué hacer?

Seguro que usted tiene otras dudas. Y está muy bien. Me gustaría mostrar una manera interesante de encontrarle una solución al problema.

Haga un dibujo siguiendo estas indicaciones: elija un círculo y distribuya una cantidad de puntos cualesquiera. Eso sí: es preferible que sean pocos para ganar claridad.

Digamos que eligió 6 puntos. Trace ahora *todas las posibles rectas que determinan esos puntos.* Como usted sabe, cualquier par de puntos *define* una recta. Es decir, hay una sola recta que pasa por cada par de puntos (vea la figura 4). Como se advierte, hay 15 rectas que unen los 6 puntos de a pares.[12]

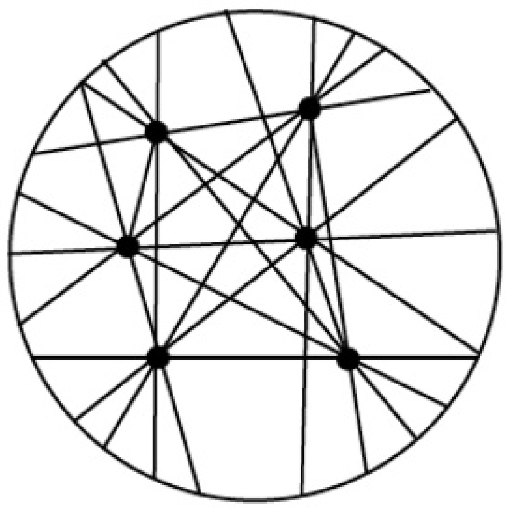


Figura 4

Ahora, elija un punto *P afuera* del círculo pero *que no esté sobre la prolongación de ninguna de las rectas que trazó recién* (vea la figura 5). Como puede ver en la figura, dibujé una recta (la llamo *L)* que no corta el círculo.

[12] Podría haber menos rectas si hubiera varios puntos alineados sobre la misma recta, pero a los efectos de lo que nos interesa demostrar esto no importa, porque el *máximo* de rectas que se pueden trazar son 15.

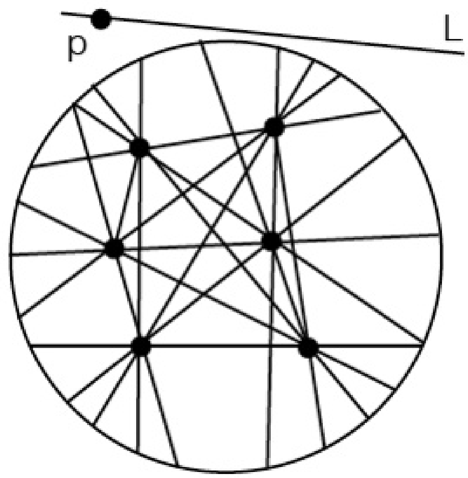


Figura 5

Estoy seguro de que puede hacer lo mismo con la figura que eligió. Por un momento, imagine que esa recta *L* empieza a moverse en la dirección del círculo (vea la figura 6) como si fuera la aguja de un reloj, desplazándose lentamente hacia la derecha. Al principio *no toca el círculo,* pero, si uno sigue rotándola, llegará un momento en que va a *tocarlo* en 1 solo punto (cuando sea *tangente* al círculo).

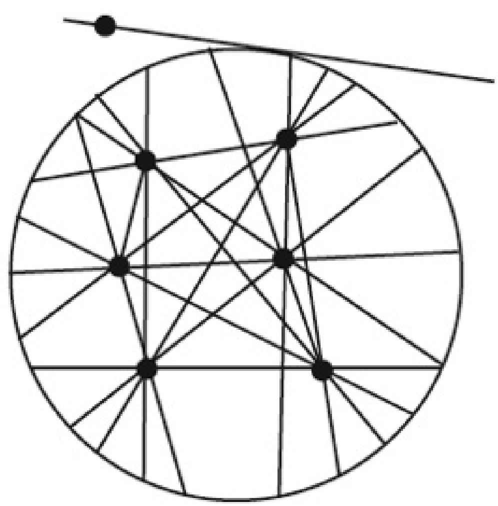


Figura 6

Si sigo avanzando, la recta *L* ahora cortará el círculo en 2 puntos... y esto va a seguir siendo así, hasta que *pase completamente por encima del círculo y llegue* *hasta el otro lado* y lo toque *otra vez* en 1 solo punto (nueva tangente) y luego, ya no lo corta más.

Todo esto se entiende bien, ¿no?... (Si la respuesta es "no", no avance hasta haberse convencido de que me pudo seguir.) Ahora bien, aunque todo esto se *entienda sin ningún problema,* ¿para qué sirve? Ya lo va a ver. La/lo invito a que piense lo siguiente: al hacer rotar a *L* por encima del círculo, ¿puede ser que toque, al mismo tiempo, *2* de los puntos que están adentro? (Reflexione antes de seguir leyendo.)

La respuesta es que esto no puede pasar porque, si no, el punto *P* que originalmente elegimos estaría sobre una de las rectas que unen puntos adentro del círculo. Y esto no puede ocurrir, porque elegimos *P* precisamente con la idea de que eso no sucediera.

Por lo tanto, cuando *L* empieza a rotar y *entra* en el círculo, ¡va tocando 1 punto por vez! (No puede tocar 2.) Así, al ir *barriendo* el círculo hacia la derecha, llegará un momento en que *L* va a dejar *3* de los puntos del círculo a la izquierda y los otros *3* a la derecha (de L). Dicho con otras palabras, al hacer que la recta *L* recorra el círculo de izquierda a derecha, llega a una posición en la que deja *la mitad de los puntos que están adentro del círculo a la izquierda, y la otra mitad, a la derecha.* Y este hecho es algo realmente precioso y quizás inesperado.

Ahora se me ocurre preguntarle a usted (sí, a usted): ¿importaba que adentro del círculo hubiera sólo *6* puntos? Como adivinará, la respuesta es ¡no!, ya que se podría haber hecho lo mismo con 100, con 1000... o con 2 millones de puntos. Con la misma idea, uno podría fabricarse una recta *L* que dejara *1 millón de puntos a la izquierda y 1 millón de puntos a la derecha.*

Moraleja: Si bien uno pensaba que lo que afirmaba el problema podía ser falso (y tenía la tentación de hacer una distribución de puntos que sirviera para comprobarlo) o bien que, de ser cierto, no habría manera de comprobarlo para *cualquier distribución de puntos dentro de un círculo,* la idea de elegir un punto afuera, que *no* estuviera arriba de ninguna de las rectas (que se obtienen al unir todos los posibles pares de puntos del círculo), termina por resolver el problema.

Bonito, ¿no? El mérito es de Charles W. Trigg. Y de usted, que lo pensó conmigo hasta acá.[13]

[13] Carlos D'Andrea me sugirió algo todavía *menos intuitivo*: el argumento que propuse prueba que en realidad hay *infinitas* rectas que dejan la mitad de los puntos de un lado y del otro. Algo que no nos habíamos planteado de entrada pero que es muy interesante.

Problema 17
Encuestas y secretarias

Quiero proponerle dos problemas que tienen una relación difícil de advertir al principio. Pero si usted acepta analizarlos uno tras otro, entenderá de qué le hablo. No hace falta que los resuelva, sólo que los piense. En las soluciones explicaré por qué creo que están relacionados. Mientras tanto, la/lo invito a que los disfrute.

a) 300 encuestados, 3 candidatos

Pablo Milrud fue quien me contó este problema de lógica (de hecho, lo planteó en el programa radial de Víctor Hugo Morales durante 2009). Le pedí el permiso que corresponde para poder publicarlo, y acá va.

Una empresa que produce encuestas para luego venderlas a distintos partidos políticos quiere evaluar qué conocimiento tiene la población de una ciudad sobre tres potenciales candidatos a diputados. La idea es mostrarle al encuestado la foto de los tres candidatos y los nombres de cada uno (son tres hombres), a fin de que cada persona asocie el nombre con la cara correspondiente.

Luego de hacer el relevamiento con 300 encuestados, los resultados fueron los siguientes:

a) 70 encuestados no pudieron asociar correctamente ninguna de las caras con los nombres.
b) Otros 30 acertaron exactamente sólo uno de los tres casos.

De los 200 que quedan, ¿cuántos acertaron los tres?

b) La secretaria, las diez cartas y el ayudante

La secretaria de un ejecutivo escribió y preparó diez cartas. Ya se disponía a ensobrarlas cuando el jefe la reclamó para otra tarea. Dejó todo sobre su escritorio con la idea de terminar cuando volviera.

Un compañero de trabajo quiso ayudarla para que no tuviera que quedarse después de hora y ensobró las cartas pensando que todos los textos eran iguales, sin reparar

en que cada sobre debía contener un texto diferente, especialmente preparado para el destinatario. Es decir, al hacerlo de esa forma terminó ubicando los textos al azar.
La pregunta que quiero hacer es la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que haya incluido *exactamente* nueve de los diez textos en el sobre correcto?

Solución.

a) 300 encuestados, 3 candidatos

Ya sabemos que hay 70 que no acertaron en ninguno de los tres casos y 30 que sólo acertaron en uno de los tres. ¿Sería posible que alguien acertara *exactamente* dos de los tres candidatos?
Antes de seguir leyendo, le invito a pensar cómo contestaría esta pregunta.
Es que si uno de los encuestados acertara exactamente dos de los candidatos, ¿qué pasaría con la tercera foto y el tercer nombre? Como sin duda advierte, deberían corresponder a la misma persona, porque los restantes dos nombres y dos fotos ya fueron asignados correctamente. Luego, la moraleja es que *no* hay manera de que alguien acierte exactamente dos de los nombres sin acertar el tercero también.
Por lo tanto, las 200 personas pudieron asignar correctamente cada foto a cada nombre.
Y Juan Sabia me sugirió *otra* solución: "Elegís una dirección *no paralela* a ninguna de las rectas que determinan los puntos y vas barriendo el círculo con rectas en esa dirección. Cada vez que pasás un punto, lo pasás a *ese* solo. Y listo. Todo lo que hay que hacer ahora es *barrer* hasta dejar un millón de un lado y otro millón, del otro".
Una última observación: el hecho de que los puntos estén *dentro* de un círculo de 10 centímetros de diámetro es irrelevante. No hace falta que estén dentro de ninguna figura ni que ésta tenga un diámetro en particular.

Una moraleja más: ahora que sabe la solución, el problema parece sencillo, ¿no? Sin embargo, quizá le haya pasado lo mismo que a mí, que, cuando Pablo me lo contó, tardé un rato en advertir lo que sucedía. Es más, me pareció que no era posible deducir el resultado con los datos disponibles.
Ésta es una manera de interpretar esas situaciones en las que estamos ante un problema que parece no tener solución. Cuando uno la descubre, finalmente, no puede entender cómo no se le ocurrió antes.

b) La secretaria, las diez cartas y el ayudante

Si nueve de los diez textos están en el sobre que les corresponde, el décimo también, ya que no queda otra alternativa. Por lo tanto, la probabilidad de que suceda lo que pido es... *¡cero!* El caso por el que yo pregunto no podría darse nunca.
Antes de enunciar estos dos problemas dije que estaban relacionados. En efecto, después de haberlos pensado, uno descubre lo que tienen en común:

- En el primer caso no puede haber un encuestado que acierte *exactamente* dos de los nombres sin haber acertado el tercero también.
- En el segundo problema, el empleado no pudo haber ensobrado bien exactamente nueve de las cartas sin haber hecho lo mismo con la restante.

Como seguramente advertirá ahora, se trata del mismo problema, la misma lógica, planteado de dos formas diferentes.

Problema 18

¿Podré adivinar el animal que usted está pensando?

Quiero comprobar algo con usted. Sé que no podrá contestarme, pero le propongo que hagamos algo mentalmente para ver qué sucede. Antes de avanzar, voy a *numerar* las letras del abecedario. O sea, manteniendo el orden alfabético, asociaré un número a cada letra. En todo caso, vea la tabla 1.

Dicho esto, le propongo lo siguiente:

1. Piense un número cualquiera entre 1 y 9 (obviamente, aunque quiera, no va a poder decírmelo).
2. Multiplíquelo por 9.
3. Sume los dígitos del resultado.
4. A ese resultado réstele 4.
5. Ahora obtuvo un número de *un solo dígito.*
6. Fíjese en la tabla la letra que tiene asociada.
7. Piense en un animal que empiece con esa letra.
8. Vaya a la página de las respuestas y va a ver que yo sé en qué animal pensó usted.

Tabla 1

A	1	H	8	Ñ	15	U	22
B	2	I	9	O	16	V	23
C	3	J	10	P	17	W	24
D	4	K	11	Q	18	X	25
E	5	L	12	R	19	Y	26
F	6	M	13	S	20	Z	27
G	7	N	14	T	21		

Solución.

¡El elefante![14] Sí. Usted tuvo que haber pensado en un elefante. Si es así, trate de deducir por qué y cómo lo supe.

Si realmente no pensó en un elefante, es porque hizo mal alguna cuenta o porque se le ocurrió algún otro animal (que yo no conozco) cuyo nombre empieza con la letra *e.* En cualquier caso, trate de pensar por qué del proceso anterior resulta *siempre* la letra *e.* O bien, por qué el número 5 es siempre el resultado final.

Me explico: al principio, le pedí que eligiera un número cualquiera entre 1 y 9. Después, que lo multiplicara por 9. Fíjese conmigo cuáles son los posibles resultados de estos pasos.

Si eligió el 1, al multiplicarlo por 9 obtuvo 9.
Si eligió el 2, al multiplicarlo por 9 obtuvo 18.
Si eligió el 3, al multiplicarlo por 9 obtuvo 27.

Y así siguiendo... hasta llegar al que eligió 9 y al multiplicar obtuvo 81.

Los posibles resultados, entonces, son: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. Pero si ahora suma los dígitos de cada uno de estos números (no deje de hacerlo) advertirá que el resultado siempre es 9.

9	9 (lógico)
1 + 8	9
2 + 7	9
3 + 6	9
4 + 5	9
8 + 1	9

Como después le pedí que le restara 4, el resultado tuvo que ser 5, inexorablemente. Y el número 5 tiene asociada la letra *e.*

Para terminar, le pedí que pensara en un animal que empezara con esa letra, ¿y cuántos animales conoce, además del *elefante,* que empiecen con *e*? Así fue como pude deducir lo que había pensado. ¿No es un muy lindo problema?

[14] Juan Sabia observó que uno podría haber encontrado otros animales: escorpión, escarabajo, erizo, emú, etc. Y tiene razón. ¡Por eso espero que usted haya elegido "elefante"!

Problema 19
Un problema de aritmética

El que sigue es un problema de aritmética. Usted decide si le parece sencillo o no. En todo caso, mi objetivo no sólo es encontrar la respuesta, sino aprender a hilvanar ideas y a sortear restricciones
durante la búsqueda. Sólo así uno puede adquirir -casi inadvertidamente- un entrenamiento que le sirve tanto para resolver *este* problema como para abrir caminos que le serán útiles en otras situaciones. En algún sentido, es como si estuviéramos aprendiendo a razonar con una buena lógica.
Acá va.
¿Cuál es el número de 5 dígitos que cumple con los siguientes requisitos?

a) El primer dígito es *uno más* que el segundo.
b) El último es *cuatro menos* que el primero.
c) El cuarto es *uno más* que el último.
d) La suma de todos los dígitos es *35.*

Solución.
Como no conocemos el número que se busca, escribámoslo (por ahora) así:

abcde

¿Cómo hacer para *traducir* en forma de *igualdades* o *ecuaciones* las restricciones que figuran en el planteo?
La número 1 se puede *reescribir así:*

$$a = b + 1 \qquad (*)$$

La número 2:

$$e = a - 4$$

Pero como ya sabemos por la ecuación anterior que $a = b + 1$, reemplazamos el valor de *a* por (b + 1) y obtenemos:

$$e = a - 4 = (b + 1) - 4 = b - 3$$

O sea,

$$e = b - 3 \quad (**)$$

Por otro lado, la número 3 dice:

$$d = e + 1$$

Luego, si usamos la ecuación anterior (**), obtenemos:

$$d = e + 1 = (b - 3) + 1 = b - 2$$

O sea,

$$d = b - 2 \quad (***)$$

La última igualdad, la número 4, se puede reescribir retomando lo que sabemos a partir de (*), (**) y (***).

$$a + b + c + d = 35$$

Luego,

$$a + b + c + d = (b + 1) + b + c + (b - 2) + (b - 3) =$$

$$= (4b - 4) + c = 35$$

Luego,

$$4b + c = 39$$

De esta última igualdad se puede *despejar c*y se obtiene:

$$c = 39 - 4b \quad (****)$$

Ahora lo invito a analizar un poco la última igualdad.

Como todos los dígitos involucrados son números que van del 0 al 9, ¿cómo hacer para que la igualdad (****) tenga sentido?

¿Por qué pregunto esto?

Si, por ejemplo, supusiéramos que $b = 1$, entonces la ecuación (****) se traduciría en:

$$c = 39 - 4b = 39 - 4 \times 1 = 35$$

ser un número entre 0 y 9. Revisemos juntos la ecuación (****) para ver si hay algún posible *valor* que le podamos dar a *b,* de manera que esa igualdad tenga sentido. En principio, tenemos que descartar *b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.* Es que si *b* tomara alguno de esos valores, *c* se transformaría en

$$c = 39, 35, 31,27, 23, 19, 15, 11$$

Luego, los *únicos* valores posibles que puede tomar *b* son: **b = 8,** ó **b = 9**

¿Por qué? (Piénselo un ratito antes de seguir leyendo.)

Es que si $b = 8$,

$$c = 39 - 4 \times 8 = 39 - 32 = 7$$

Y si $b = 9$, entonces

$$c = 39 - 4 \times 9 = 39 - 36 = 3$$

O sea, hemos descubierto que *b* puede tomar *únicamente* dos valores: 8 o 9. Por otro lado, mirando (*), si *b* = 9, eso querría decir que *a* = 10... ¡Y eso no puede ser!

Luego, si todo el análisis que hicimos es correcto, uno *concluye* que

$$b = 8$$

Una vez que llegamos a esta conclusión, lo que sigue debe ser mucho más fácil. Veamos.

Si *b* = 8, entonces de (*) se deduce que *a* = 9. Por otro lado, como sabemos que *c* = 39 - 4 x b, entonces:

$$c = 39 - 4 \times 8 = 7$$

Luego:

$$c = 7$$

Por último, usamos (**) y (***), ahora que sabemos el valor de *b* (8).

Por un lado, (**) dice que

$$e = b - 3 = 8 - 3 = 5$$

O sea,

$$e = 5$$

Por otro lado, (***) dice que

d = b - 2 = 8 - 2 = 6

Es decir,

d = 6

Ahora, juntando todo lo que hemos averiguado, estamos en condiciones de reconocer el número que buscábamos (abcde), y este número es

abcde = 98765

Problema 20
¿Cuánto vale cada camisa y cada pantalón?

Analice el siguiente problema y piense la solución. Sólo cuando haya dado con ella lea la solución. Pero no lo haga antes: espere hasta resolverlo. Acá va.
Se sabe que 3 camisas y 5 pantalones cuestan $ 200. Por otro lado, se sabe que 2 camisas y 3 pantalones cuestan $ 130. ¿Está en condiciones de determinar *cuánto cuesta cada camisa y cada pantalón?*

Solución.
Voy a llamar *c* a cada camisa y *p* a cada pantalón. Entonces, lo que dice el problema es:

1) **3 c + 5 p = 200**
2) **2 c + 3 p = 130**

¿Qué hacer ahora? El objetivo (como dice el enunciado del problema) es tratar de encontrar el valor de cada prenda. Sí, claro, pero ¿cómo?
Si uno duplicara las cantidades de la primera igualdad (1), o sea, si en lugar de 3 *c* y de 5 p, comprara 6 *c* y 10 p, tendría que pagar el doble... ¿Me sigue hasta acá? O sea, si uno multiplica por 2 lo que figura en la primera igualdad obtiene:

$$6\,c + 10\,p = 400 \qquad (*)$$

Por otro lado, si uno triplica las cantidades que compra en la igualdad (2), también sucede lo mismo. Es decir,

$$6\,c + 9\,p = 390 \qquad (**)$$

Ahora, mire las dos igualdades que quedaron (*) y (**).

Esto dice que uno -por un lado- compró 6 *c* y 10 *p* y pagó $ 400. Por otro lado, compró también 6 *c* pero 9 *p* y pagó $ 390. Entonces, la diferencia en mercadería entre un caso y otro *¡es sólo 1 pantalón!* Y la diferencia en precio es de $ 10. La conclusión, entonces, es que cada pantalón cuesta $ 10.
¿Cómo hacer ahora para calcular el precio de cada camisa? Si uno sabe (por (*)) que 6 *c* + 10 *p* = 400, y cada pantalón cuesta $ 10, entonces

$$6\ c + 10 \times 10 = 400\ \ 6\ c + 100 = 400$$

$$6\ c = (400 - 100)$$

$$6\ c = 300$$

Luego, si 6 camisas cuestan $ 300, cada camisa costará $ 50. Y listo. De esta forma se resolvió el problema. Puesto en términos de las igualdades que figuran más arriba, podríamos escribirlo así:

$$3\ c + 5\ p = 200\ \ 2\ c + 3\ p = 130$$

Mi estrategia fue *multiplicar* el número de prendas que figuran en cada igualdad, de manera de tener la misma cantidad de camisas en el primero y en el segundo caso. Y listo. Al haber la misma cantidad de camisas tanto en la primera compra como en la segunda, puedo saber cuánto pagué por cada pantalón.

Moraleja: El análisis de este problema es lo que se conoce con el nombre de "resolución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas". Así dicho, parece que hemos resuelto algo verdaderamente muy importante... quizá porque en alguna medida lo es. Sin embargo, como se dará cuenta, no hay nada raro escondido que usted no hubiera podido solucionar sin ayuda.

Problema 21
Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando...

Corría el año 1964. Yo cursaba por la mañana el quinto año del secundario en la Escuela Manuel Belgrano y por las noches asistía al curso de ingreso (equivalente al CBC de hoy) que se dictaba en la "famosa sede"[15] de la calle Perú. El curso estaba dividido en dos semestres: en el primero se dictaban Matemática, Biología y Geología; en el segundo, Física y Química.

Del primer examen parcial recuerdo un problema particular. Y créame que lo que está a punto de leer fue exactamente lo que nos pidieron que resolviéramos. Por alguna razón que ignoro ese problema quedó en mi memoria para siempre. Decía así:

"Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes hoy. Si la suma de nuestras edades es 35 años, ¿qué edad tiene cada uno?"

No se apure a mirar la solución... ¿Qué gracia tendría? Siéntese con un poco de tiempo y piénselo. Es divertido, entretenido, e incluso más: ya es interesante tratar de *entender* el enunciado, que parece un verdadero "trabalenguas".

De todas formas, como siempre, incluyo la solución.

Solución.

Uno de los atractivos de este problema es que entender el enunciado es en sí mismo un desafío. Por eso le propuse que se tomara un tiempo para descubrir qué es lo que se pide y destrabar lo que justamente parece un trabalenguas.

Y se trata, en todo caso, de ser capaz de plantear adecuadamente las ecuaciones para poder resolverlo. En realidad, preferiría no tener que usar la palabra *ecuación,* porque suena intimidatorio. Es que en la vida cotidiana no estamos acostumbrados a hablar de *ecuaciones* y, entonces, una cosa que es tan sencilla parece entrañar una dificultad imposible de resolver.

[15] Me refiero al edificio de la Facultad de Ciencias Exactas, situado en la esquina de Perú y Alsina, donde ingresó la policía en la tristemente famosa "noche de los bastones largos", durante el gobierno de Juan Carlos Onganía.

Pero, de hecho, cuando va a un supermercado, llega al cajero con la mercadería y éste, luego de hacer la suma de los productos, le dice "son 47 pesos", y usted saca un billete de 100 pesos y le paga, el cajero y usted están coparticipando en la solución de una ecuación de primer grado, aunque no lo sepan (y lo bien que hacen, porque no hace falta tanto nombre para ir a un supermercado).

Si me sigue un minuto más, acordará conmigo en que el cajero está interesado en darle su vuelto y usted mucho más que él en recibirlo. Pero para eso, si al vuelto que él tiene que darle le asignáramos la letra *x,* entonces, *el vuelto x* más los *47 pesos* (que es lo que usted tiene que pagar) deberían ser iguales a los *100 pesos* que entregó. Es decir,

$$\mathbf{x + 47 = 100}$$

Se trata entonces de descubrir el *vuelto* o, lo que es lo mismo, de *despejar* la letra x. Se usa el término *despejar* porque lo que uno quiere hacer es aislar la *x* para poder calcular su valor. Por eso, si uno pasa de término el número 47 (estaba sumando a la izquierda y, por lo tanto, aparece ahora restando a la derecha), se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{x = 100 - 47 = 53}$$

Luego, tanto el cajero como usted respiran tranquilos. El vuelto es de 53 pesos. En el medio de la transacción, alguien tuvo que resolver una ecuación de primer grado. Pero poco importó. En todo caso, lo que quise mostrar con este ejemplo es que uno resuelve ecuaciones en la vida cotidiana y lo hace sin darse cuenta.

Ahora sí, después de esta digresión, vuelvo al problema original. El planteo dice:

Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes hoy.

Pongámosles *nombres* a todos los datos que no conocemos. Voy a llamar *x* a *mi edad actual* e *y a tu edad actual.* Si ahora quiero calcular la diferencia entre las dos edades, ¿qué tengo que hacer?

Por ejemplo: ¿cómo calcularía la diferencia de edad que hay entre usted y su hermana? ¿O su padre? ¡Lo que haría sería restar las edades! ¡El de mayor edad menos el de menor! Bueno, en este caso hay que hacer lo mismo. La diferencia de edades, o sea $x - y$, es justamente la cantidad de años que uno le lleva al otro.

Ahora bien, preste atención a este hecho. Si bien x e y varían a medida que pasa el tiempo (la edad de cada uno se modifica con el paso del tiempo), hay algo que permanece *constante*. ¿Quiere pensar qué es?

Sigo yo: lo que permanece constante es la edad que uno le lleva al otro. O sea, ¡la diferencia entre los dos es invariable!

En este caso, la diferencia de edades es

$$\mathbf{x - y}$$

Ahora -creo- ya tenemos todos los elementos para abordar el problema. Veamos si es cierto.

El problema dice en un momento: "... la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes". Nos pusimos de acuerdo recién en que la edad que tú tienes hoy es *y.* Por otro lado, cuando yo tenía *tu edad,* o sea *y, ¿qué edad tenías tú?*

Bueno, en ese momento, *tú* tenías

$$\mathbf{y - (x - y) \quad (a)}$$

¿Por qué? ¿Cómo se calcula la edad que tenía *y* cuando yo tenía la edad que *y* tiene ahora? Se calcula *restando la diferencia de edades.* Por eso, se tiene (a).

Pero el problema dice que yo tengo ahora *el doble de esa edad.* Entonces, *mi edad actual,* que es x, *es el doble del número* que figura en (a). O sea:

$$\mathbf{x = 2(y - (x - y)) \quad (b)}$$

Justamente, esta ecuación es la que yo quería conseguir. La igualdad (b) expresa toda la información que contiene el problema. Avanzo ahora un paso más y *descompongo* lo que dice (b).

$$x = 2(y - (x - y)) = 2y - 2(x - y) = 4y - 2x$$

Pasando de miembro, obtenemos:

$$3x = 4y$$

O, lo que es lo mismo:

$$3x - 4y = 0 \quad (c)$$

Por supuesto, el problema no terminó acá. Todavía falta considerar la segunda parte de los datos, que aún no retomamos. ¿Recuerdan qué decía esa parte?
Decía que la suma de las edades de las dos personas (x e y) es igual a 35.
¿Cómo poner esto en una igualdad? Bueno, creo que esta ecuación es más sencilla:

$$x + y = 35 \quad (d)$$

Luego, juntando las ecuaciones (c) y (d), tenemos:

$$3x - 4y = 0 \; x + y = 35$$

Ahora multiplico la segunda ecuación por 3 y tengo:

$$3x + 3y = 3 \times 35 \quad (e)$$

Si ahora *restamos las igualdades* (e) y (c), tenemos:

$$(3x + 3y = 3 \times 35) - (3x - 4y = 0) = (7y = 3 \times 35)$$

Luego, dividiendo por 7 obtenemos:

$$y = 3 \times 5 = 15$$

Por otro lado,

$$3x = 4y = 4\ (3 \times 5) = 3 \times (4 \times 5) = 60$$

Esto implica que

$$x = 4 \times 5 = 20$$

En resumen, hemos *descubierto* que

$$x = 20 \text{ e } y = 15$$

Ahora comprobemos juntos que este resultado es correcto. Está claro que la *suma* de ambos es 35. Por otro lado, la diferencia de edades es de 5 años. Esto quiere decir que, cuando *x* tenía 15 años, *y* tenía 10. Y justamente, la primera igualdad que consideramos dice que *x* tiene el *doble* de esa edad, o sea, *x* (que tiene 20) tiene el doble de la edad que tenía *y* en el momento en que *x* tenía 15 años. Como *y* tenía 10 años en ese momento, se verifica la primera igualdad. Por lo tanto, hemos encontrado juntos la solución.

Ahora bien, querría que hiciéramos algunas reflexiones más. Si uno no *impusiera* la segunda *condición* (según la cual la *suma de las edades tiene que ser 35),* entonces, ¿cuántas soluciones tendría el problema? Vale la pena que piense antes de seguir leyendo.

Sigo yo: si no existiera la restricción sobre la *suma* de las edades, el problema tendría infinitas soluciones. ¿Por qué? Fíjese lo que pasaría: como uno tendría la libertad de elegir que la suma de las edades fuera cualquier número, se podría elegir, por ejemplo, el número *7.* Verifique entonces que los resultados

$$x = 4,\ y = 3$$

serían una posible solución del problema.

Por otro lado, si yo estableciera que las edades suman 21, en ese caso,

$$x = 12, y = 9$$

cumplirían con las condiciones que pide el problema. O sea, si yo *cambio* la condición sobre la suma de las edades, la solución del problema varía.

Le sugiero que pruebe ahora con sus propias elecciones, y verá que en función de cada suma que haya definido habrá una solución distinta. Por eso decía recién que hay infinitas soluciones.

Ahora quisiera *subir la apuesta.* ¿Habrá alguna forma de resolver *todos* los casos al mismo tiempo?

¿Qué quiero decir con *todos* los casos? Como vimos recién, si uno cambia la suma (probamos con 7, con 21 y, en el problema original, con 35), varían los valores de x y de y. ¿Cómo hacer para poder calcular rápidamente los valores de x y de y si la suma es un número A?

Entonces, supongamos que usted me da un número A que corresponde a la *suma* de las edades de x e y. En ese caso, tendríamos dos ecuaciones:

$$3x - 4y = 0 \quad (*)$$

$$x + y = A$$

Tal como hicimos en el caso que figura más arriba, si uno *multiplica por 3 la segunda ecuación* obtiene:

$$3x - 4y = 0 \; 3x + 3y = 3A$$

Restando ahora la segunda ecuación de la primera, tenemos:

$$7y = 3A \quad (**)$$

Fíjese qué interesante lo que dice la igualdad (**). Si medimos las edades en números enteros, entonces el número *A* tiene que ser un múltiplo de 7, para que, cuando *despeje* la edad *y* de la ecuación (**), quede un número natural. Para eso, *A* tiene que ser divisible por 7 (ya que 3, que es el otro factor, no lo es).
Luego,

$$y = (3 \times A) / 7 \qquad (***)$$

De paso, se ve que, como *A* tiene que ser múltiplo de 7, *y* resulta múltiplo de 3.
Luego se despeja *y* de esta igualdad (***).
Y, por último, uso la ecuación

$$3x = 4y$$

y divido por 3 en los dos miembros. Se tiene entonces:

$$x = 4\ (y / 3) \qquad (****)$$

Luego, juntando (***) y (****), uno advierte que *tiene todo lo que necesita.* Basta con que alguien nos diga el valor de *A* para calcular
y con la igualdad (***), y cuando conocemos el valor de *y* usamos la igualdad (****) para calcular x.
Esto resuelve completamente el problema.

Problema 22
Siempre hay un martes 13[16]

Es curioso que, si bien hay gente que dice *no* ser creyente en cuestiones que involucren la suerte o las supersticiones, *todos* inexorablemente están atentos a un martes 13. Es difícil buscar el origen de esta creencia pero, mientras los latinos de todos los países de América (y los griegos) tienen una particular aversión por el "martes 13", las culturas anglosajonas desplazan esa superstición al día viernes. Para ilustrar esta diferencia nada mejor que recordar que las famosas películas *Friday the 13th,* de la última parte del siglo XX, fueron traducidas al español como *Martes 13.*

La pregunta que uno puede hacer es la siguiente: ¿habrá habido algún año en el que ninguno de los 52 martes haya caído el día 13? Más aún: ¿habrá algún año en el futuro *sin un martes 13?* En lugar de escribir la respuesta, me gustaría proponerle que la descubramos juntos.

Hagamos el siguiente cálculo. Tome un calendario cualquiera, que corresponda a cualquier año. Voy a elegir el de 2009, pero no habrá diferencia con el que haya elegido usted. Voy a anotar los días de la semana que corresponden a estas fechas:

13 de marzo	13 de abril	13 de mayo
13 de junio	13 de julio	13 de agosto
13 de septiembre	13 de octubre	13 de noviembre
13 de diciembre		

En el caso de 2009, correspondieron, respectivamente, a los días:

[16] Pablo Milrud y Pablo Coll, productores científicos del programa *Alterados por Pi* (que se emite por el Canal Encuentro de la Argentina), me sugirieron escribir esta curiosidad de los calendarios.

Tabla 1

13 de marzo	viernes	13 de agosto	jueves
13 de abril	lunes	13 de septiembre	domingo
13 de mayo	miércoles	13 de octubre	martes
13 de junio	sábado	13 de noviembre	viernes
13 de julio	lunes	13 de diciembre	domingo

Ahora bien, si usted mira los días de la semana que cayeron ese año (2009) va a ver que aparecen todos. Es decir: a cada día de la semana (de domingo a sábado) le corresponde el 13 en algún momento del año. En particular, advierta que justo el 13 de octubre es martes... martes 13.

Uno podría sospechar que esto es una casualidad. ¿Por qué tendría que suceder *todos* los años?

Aquí es donde lo invito a dar un paso más. ¿Cuántos días hay desde el 13 de marzo al 13 de abril? (Haga la cuenta.)

Sigo yo: el resultado es 31. ¿Y cuántos días hay entre el 13 de abril y el 13 de mayo? Resultado: 30.

Acá abajo escribo la cantidad de días que hay entre:

Tabla 2

13 de marzo y 13 de abril	31
13 de abril y 13 de mayo	30
13 de mayo y 13 de junio	31
13 de junio y 13 de julio	30
13 de julio y 13 de agosto	31
13 de agosto y 13 de septiembre	31
13 de septiembre y 13 de octubre	30
13 de octubre y 13 de noviembre	31
13 de noviembre y 13 de diciembre	30

Por último, sólo para simplificar la forma de escribir, le voy a poner un número a cada día de la semana. Voy a llamar

Tabla 3

Domingo	0
Lunes	1
Martes	2
Miércoles	3
Jueves	4
Viernes	5
Sábado	6

Luego, como el 13 de marzo es un día viernes, como vimos en la tabla 1, uno de los días 13 del año correspondió a un martes. En este caso, fue el 13 de octubre.
Voy a construir una tabla que se independice de qué día de la semana cae 13 de marzo. Es decir, cualquiera sea el año, 13 de marzo será uno de los siete días de la semana. Respetando que entre el día 13 de cada mes hay una distancia[17] que evaluamos en la tabla 2, tenemos la siguiente distribución:

Tabla 4

Marzo	0	1	2	3	4	5	6
Abril	3	4	5	6	0	1	2
Mayo	5	6	0	1	2	3	4
Junio	1	2	3	4	5	6	0
Julio	3	4	5	6	0	1	2
Agosto	6	0	1	2	3	4	5
Septiembre	2	3	4	5	6	0	1
Octubre	4	5	6	0	1	2	3
Noviembre	0	1	2	3	4	5	6
Diciembre	2	3	4	5	6	0	1

[17] En este caso, utilizo la palabra “distancia” como forma de indicar la “distancia en días” que hay entre una fecha y otra.

Ahora, analicemos juntos la tabla 4. ¿Qué dice? Recuerde que cada número entre 0 y 6 corresponde a un día de la semana (como indicamos en la tabla 3).
Ahora bien: ¿cómo interpretar el número 0 que figura en la fila de marzo? Esto significa que el 13 de marzo (de algún año) corresponde al número 0, o sea, un domingo. Si uno sigue la columna hacia abajo, tomando en cuenta la distancia que hay entre los días 13 de cada mes sucesivo, encuentra que -otra vez, independientemente del año- el 13 de abril corresponde al número 3, o sea, un miércoles. Y si seguimos hacia abajo, veremos que el 13 de mayo cae en el número 5, es decir, un viernes. El 13 de junio, en el número 1, o sea, un lunes. El 13 de julio, en el número 3, o sea, otra vez un miércoles; el 13 de agosto en el número 6, un sábado; el 13 de septiembre en el número 2, un martes; el 13 de octubre en el número 4, un jueves; el 13 de noviembre en el número 0, un domingo, y por último el 13 de diciembre en el número 2, o sea, un martes (otra vez). En este caso, sin considerar ni enero ni febrero, ya se ve que los días 13 de septiembre y de diciembre correspondieron a días martes (como uno quería ver).
¿Cómo terminar el argumento? Basta con ver que, sin importar el año elegido, el 13 de marzo tiene que corresponder a alguno de los días de la semana (numerados del 0 al 6). En cuanto uno tiene ese dato, ya sabe qué columna mirar. Luego, *en alguna parte* de esa columna tiene que haber un número 2 (verifíquelo en la tabla 4)... y ese número corresponderá al mes en el cual el día 13 ¡es un martes!

Nota: Si quiere convencerse de otra forma, consiga los calendarios de los últimos diez años y fíjese, por un lado, en el 1° de marzo y, por otro, revise todos los martes del año. Esto es lo que va a descubrir:

a) el 1° de marzo de 2009 fue domingo y el 13 de octubre fue martes
b) el 1° de marzo de 2008 fue sábado y el 13 de mayo fue martes
c) el 1° de marzo de 2007 fue jueves y el 13 de noviembre fue martes
d) el 1° de marzo de 2006 fue miércoles y el 13 de junio fue martes
e) el 1° de marzo de 2005 fue martes y el 13 de diciembre fue martes
f) el 1° de marzo de 2004 fue lunes y el 13 de julio fue martes, y, finalmente,
g) el 1° de marzo de 2002 fue viernes y el 13 de agosto fue martes.

Conclusión: cualquiera sea el calendario, el 1° de marzo será algún día de la semana (obviamente). Luego, fíjese en la lista que va desde (a) hasta (g) y allí descubrirá qué día de ese año fue martes 13.

Problema 23
¿Qué ancho tiene el río?[18]

El problema que sigue fue el que más tiempo me acompañó últimamente. En general, disfruto más de aquellos planteos que no tienen una solución inmediata y que "llevo puestos en mi cabeza" durante varios días. Como siempre digo, de eso se trata: de discutir internamente cómo abordar una situación, cuáles son las vías de acceso que conviene tomar.

Más aún, lo que más me atrapó de este problema es que me parecía que no lo iba a poder resolver por falta de datos. Es muy posible que a usted, luego de leerlo y pensarlo un rato, se le ocurra una solución rápida y sencilla, y *no* pueda entender cómo me llevó tanto tiempo. Si es así, bárbaro. De todas formas, creo que vale la pena que lo piense porque es muy fácil entenderlo y elaborar estrategias para resolverlo. Acá va.

Un río separa dos ciudades. Cada una tiene un puerto y en cada costa hay un barco. Los dos barcos salen al mismo tiempo cruzando el río en dirección opuesta, de manera tal de unir un puerto con el otro. Cada uno hace el trayecto a *velocidad constante,* es decir, mantienen la velocidad, que no necesariamente es la misma en cada caso. Ahora bien: cuando cada barco llega al otro lado, da vuelta inmediatamente, sin detenerse, y regresa al lugar de origen. Y repiten el proceso una y otra vez.

Los dos barcos salen al mismo tiempo. Se encuentran por primera vez en el camino a 7 kilómetros de una de las costas y continúan su trayecto. Cuando cada uno llega del otro lado, da la vuelta al instante.

Los barcos vuelven a encontrarse una segunda vez, en este caso a 4 kilómetros de la costa opuesta.

Pregunta: ¿cuál es el ancho del río?

Solución.

[18] Este problema fue publicado en el libro *Mathematical Quickies,* de Charles W. Trigg (decano emérito del Los Angeles City College). Pero la formulación original apareció en la revista *American Mathematical Monthly,* en febrero de 1940, ¡hace setenta años! El autor que debe llevarse el crédito es, entonces, W. C. Rufus.

No sé cómo le habrá ido a usted, pero a mí el problema me entretuvo mucho tiempo. No sabía cómo abordarlo e intenté acercarme desde distintos ángulos. Me preguntaba si no era necesario conocer la velocidad de cada uno, o al menos una de ellas, para poder determinar el ancho del río.

Como sea, ocupó varios ratos de mis días, hasta que se me ocurrió una potencial solución. Estoy seguro de que no debe ser la única; en todo caso, es *una* solución. O una forma de llegar a ella.

Quizás usted haya encontrado otra más breve, más rápida y/o más clara. Por supuesto, esto la/lo hará sentirse muy bien, como corresponde. Y si no se le ocurrió ninguna solución, tampoco pasa nada. ¿Acaso no disfrutó del camino que recorrió para poder pensarla?

En la figura 1 aparecen los dos barcos en cada una de las costas. Los voy a llamar *A* y B.

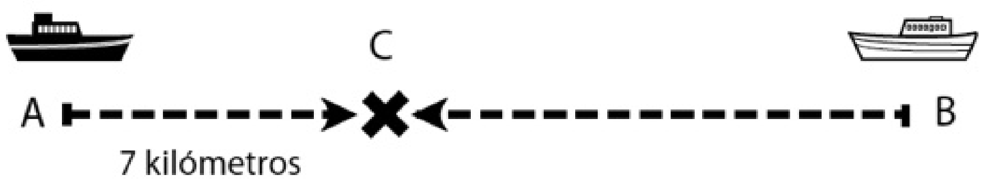


Figura 1

Cuando se encuentran por primera vez en el punto C, lo hacen a 7 kilómetros de una de las costas, digamos la izquierda, desde donde ha salido *A*.

A y *B* están en el mismo lugar (en C), cuando *A* ha recorrido ya 7 kilómetros. Se cruzan y siguen su marcha. En algún momento (no necesariamente el mismo) *A* llega a la costa derecha y *B* a la izquierda. Cuando cada uno alcanza la otra orilla, da la vuelta sin perder tiempo y sale en dirección contraria.

Y ahora sabemos que, cuando se encuentran otra vez, lo hacen en un punto *D* que está a 4 kilómetros de la costa derecha.

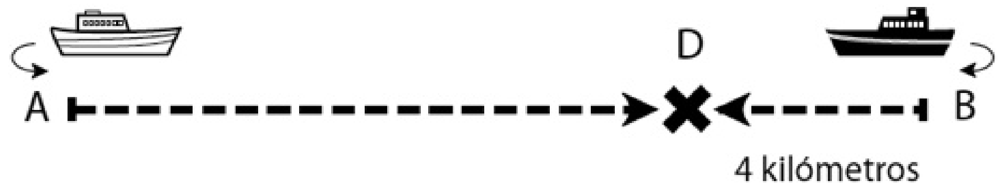


Figura 2

Ahora quiero hacer una observación que me parece muy importante y que lleva a la solución del problema: cuando los barcos se encontraron la primera vez, *entre los dos* habían recorrido el ancho del río. Todavía no sabemos esta medida, pero sí que la suma de los dos tramos que navegaron entre ambos resulta ser el ancho total del río (el dato que estamos buscando).

En principio, los dos barcos van a distintas velocidades. Sin embargo, después de que el barco *A* haya llegado a la costa derecha y el barco *B* a la izquierda, entre ambos habrán recorrido otro ancho del río.

Es decir, *A* recorrió el río de izquierda a derecha y *B* lo hizo en sentido contrario. Independientemente de que al cruzarse la suma de las distancias que han recorrido sea exactamente el ancho del río, cuando los dos toquen la costa contraria habrán recorrido el río dos veces: una vez *A* y otra vez B.

Y por último, piense lo siguiente: al tocar la costa contraria, dan la vuelta y se encuentran nuevamente en *D*, que está a 4 kilómetros del lado derecho del río. En ese momento, entre los dos recorren el ancho del río una tercera vez: lo atravesaron dos veces cuando cada uno llegó del otro lado, y ahora tenemos que sumar las distancias recorridas por los dos cuando se encuentran en *D*.

MORALEJA (hasta acá): Si uno suma las distancias que recorrieron los dos al encontrarse en D, el resultado es que navegaron tres veces el ancho del río.

Éste es un dato no menor que lo invito a revisar. Más aún: le propongo que no siga leyendo si no está seguro de haber entendido. Vuelva atrás tantas veces como haga falta y, desde ya, piense si está de acuerdo con lo que escribí hasta aquí. La/ lo invito a que no avance sin estar convencido.

Ahora bien: estamos de acuerdo en que entre los dos barcos recorrieron *tres* veces el ancho del río (sumados los tramos que hizo cada uno).

Quiero separar dos hechos:

a) Los dos barcos van a velocidad constante (aunque no necesariamente la misma).
b) Cuando el barco *A* se encuentra por primera vez con *B* ha recorrido 7 kilómetros. Y se cruza con *B* porque entre los dos han recorrido el ancho del río una vez.

En consecuencia, cada vez que entre los dos recorren el ancho del río, el barco *A* recorre 7 kilómetros.

Ahora bien, como lo recorrieron tres veces entre los dos, el barco *A* recorrió 3 veces 7 kilómetros, o sea, 21 kilómetros. Por otro lado, cuando se encontró con *B* por segunda vez estaba a 4 kilómetros de la otra costa. Es decir, como *A* salió de la otra costa (digamos la izquierda) y se encontró con *B* a 4 kilómetros de la derecha, eso significa que hizo 4 kilómetros más que el ancho del río.

Luego, el ancho del río es de 21 kilómetros *menos* 4 kilómetros (21 - 4) = 17 kilómetros.

Como ve, este problema es verdaderamente espectacular porque, más allá del desarrollo que propuse, al principio da la sensación de que con los datos disponibles no es posible resolverlo. Por suerte,

no es así. De todos modos, más allá de haber llegado al resultado, el entrenamiento que uno adquiere al pensar este problema es verdaderamente impagable, y es lo más interesante de todo.

Nota: Mientras algunos de mis amigos leían el "manuscrito" con el afán de encontrar errores, mejorar las soluciones que yo presentaba o mirar los problemas desde otro ángulo, Juan (Sabia) me propuso una respuesta preciosa y diferente de la que figura más arriba. Eso sí: involucra un "poquito así" de física y matemática, pero no quiero *no incluirla.* Acá va.

Las cosas que hace falta saber son las siguientes:

a) De física, que la velocidad de cualquier móvil se calcula dividiendo el espacio recorrido por el tiempo. Esto no debería ser muy difícil de aceptar porque es lo que uno hace constantemente cuando quiere calcular la velocidad (promedio) de un vehículo: tardó *6* horas en llegar desde Tucumán hasta Córdoba, y como hay 600 kilómetros entre ambas ciudades, entonces la velocidad promedio fue de 100 km/h.

b) De matemática, lo que hay que saber es la fórmula para calcular las raíces de un polinomio de segundo grado:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Con estos datos, entonces, voy a llamar V_1 a la velocidad del primer barco y V_2 a la velocidad del segundo (que permanecen constantes a lo largo de todo el trayecto). Por otro lado, voy a llamar x al ancho del río (lo que queremos averiguar). Entonces, como el barco 1 (que salió desde la izquierda) recorrió en un tiempo t (que no sabemos) una distancia de 7 kilómetros a una velocidad V_1 (que tampoco sabemos), tenemos la siguiente ecuación:

$$\mathbf{V_1 = 7 / t \qquad (*)}$$

Por otro lado, el segundo barco recorrió $(x- 7)$ kilómetros (en ese mismo tiempo t) que es justo cuando se encuentra con el barco 1. Como la velocidad que usa el barco 2 también es constante (y la llamo V_2), tenemos la siguiente ecuación:

$$\mathbf{V_2 = (x - 7) / t \qquad (**)}$$

Las dos ecuaciones se verifican en el momento en que se encuentran la primera vez. Cuando se cruzan la *segunda* vez, las velocidades no cambiaron, pero *sí* el tiempo que tardaron, que ahora voy a llamar *t'.* Luego, se verifican otras dos ecuaciones:

$$V_1 = (x + 4) / t' \quad (***)$$

y

$$V_2 = (2x - 4) / t' \quad (****)$$

Con estas cuatro ecuaciones se deduce que:

$$V_1 / V_2 = 7 / (x - 7) = (x + 4) / (2x - 4)$$

y de acá,

$$7(2x - 4) = (x - 7)(x + 4)$$

o sea,

$$14x - 28 = x^2 - 3x - 28$$

Y finalmente se deduce que

$$x^2 - 17x = 0$$

y en consecuencia las *únicas* dos soluciones son

$$x = 0 \text{ y } x = 17$$

Uno descarta la solución $x = 0$ (porque *sabe que el río tiene "algún" ancho);* por lo tanto, la *única* solución posible al problema es que ese ancho sea de 17 kilómetros, como ya sabíamos.

Problema 24
Número máximo de porciones al cortar una pizza

Le propongo algo muy sencillo: siéntese con un papel y una lapicera y dibuje una pizza (o un círculo, es lo mismo). La idea es empezar a cortarla en forma longitudinal (o transversal), pero con el objetivo de lograr con cada corte *la mayor* cantidad de porciones posibles. No hace falta que las porciones sean iguales, sólo se trata de que haya la mayor cantidad posible.
Por ejemplo, si uno ya la tuviera cortada en 4 (como se ve en la figura 1):

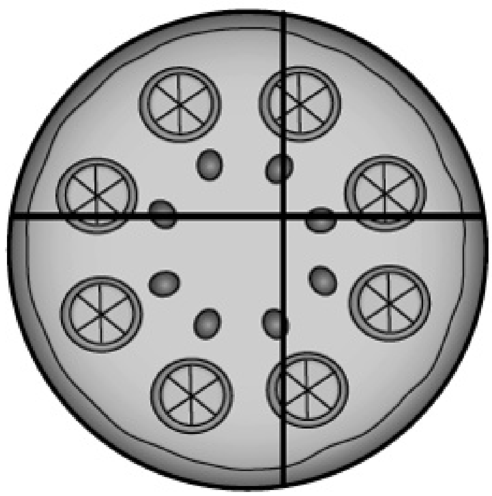


Figura 1

y ahora va a realizar otro corte tratando de conseguir el mayor número de porciones, lo que *no* haría sería cortarla con una recta que *pase* por el centro. (Fíjese en la figura 2.)

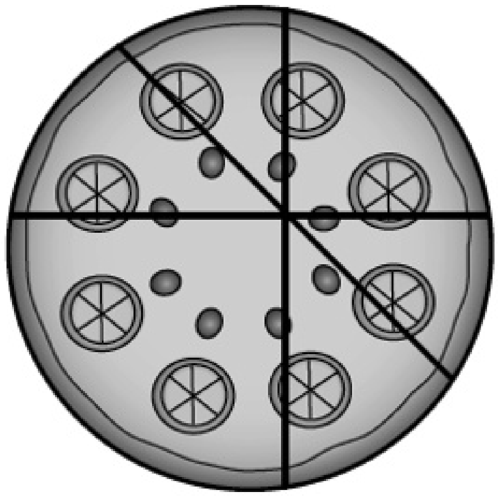


Figura 2

¿Cómo trazar la tercera recta de manera tal de tener más de *6* porciones, como en la figura 2?

Para eso, hay que trazar una recta que corte a las otras dos, pero no donde se cortan entre ellas.

Como se ve en la figura 3, ahora, en lugar de 6 porciones (como en la figura 2), hemos logrado *7.* Es decir, uno aprende que cada vez que realice un nuevo corte debe tener en cuenta dos cosas:

a) no pasar por el punto donde se cortan dos rectas ya dibujadas, y
b) tratar de cortar *todas* las rectas que había antes.

Ahora bien: yo podría seguir haciendo cada vez más cortes y contar cuál es el máximo número de porciones que soy capaz de lograr cada vez. En principio, tendríamos estas dos columnas:

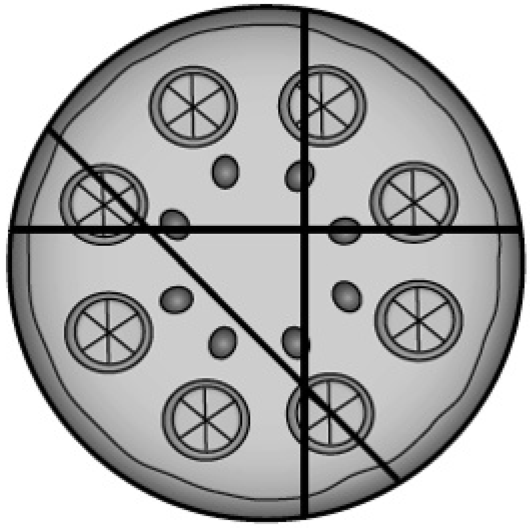


Figura 3

Tabla 1

Número de cortes o rectas	Número máximo de porciones
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22
7	29
8	37...

Sin embargo, lo que le propongo es que trate de encontrar una fórmula que le permita *predecir* cuál es el máximo número de porciones que se pueden conseguir con *x* cantidad de rectas.

Por ejemplo, si le preguntara (a esta altura del problema) cuál es el máximo número de porciones que se pueden obtener con 50 cortes, ¿qué me contestaría? ¿Y con 1000?

En todo caso, antes de dejarla/o con usted misma/o, quisiera hacerle algunas sugerencias (que puede obviar si tiene ganas de pensar el problema por su cuenta y sin necesidad de que alguien le diga cómo). La/lo invito a que observe la tabla 1 y compruebe lo siguiente: a medida que uno realiza los cortes, la pizza queda dividida en más porciones. ¿Cuántas más? La tercera columna de la tabla 2 sirve para "contar" en cuánto se incrementa el número de porciones con cada nuevo corte. Por ejemplo, si con 2 cortes tenemos 4 porciones, con 3 tenemos 7. Por eso, al lado del 7 (en la tercera columna) aparece el número 3, que obtuve "restando" las 7 porciones que se forman con 3 cortes, menos las 4 que había antes (con sólo 2 cortes).

De la misma forma, al lado del número 22 figura un 6. ¿Por qué? Porque cuando hicimos 5 cortes, la pizza quedó dividida en 16 porciones, mientras que con 6 cortes se obtienen 22. La "resta" entre 22 y 16 es justamente 6, e indica la cantidad de porciones "nuevas" en las que quedó dividida la pizza (véase la tabla 2).

Tabla 2

Cortes	Porciones	Diferencia
0	1	
1	2	1
2	4	2
3	7	3
4	11	4
5	16	5
6	22	6
7	29	7
8	37	8 ...

Es decir que el número de porciones nuevas que aparecen con cada corte es *lineal,* en el sentido de que aumenta de a uno por vez.[19] Más aún, si uno hiciera ahora las diferencias de las diferencias, o sea, una nueva columna donde restáramos los elementos de la tercera columna en la tabla 2, entonces tendríamos lo siguiente:

[19] En realidad, de a *uno más que las que se habían agregado con el corte anterior.*

Tabla 3

Cortes	Porciones	Diferencia	Doble diferencia
0	1		
1	2	1	
2	4	2	1
3	7	3	1
4	11	4	1
5	16	5	1
6	22	6	1
7	29	7	1
8	37	8	1 ...

Lo que se advierte es que, al hacer las primeras restas, hay una diferencia de una porción por cada corte. En cambio, al hacer el segundo análisis (las diferencias de las diferencias), se obtiene una constante: 1.

Ahora bien, observe lo que sucede cuando uno hace la siguiente tabla:

Tabla 4

x	x^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Y si ahora *resta* cada miembro de la segunda columna, tendrá:

Tabla 5

x	x^2	Diferencia
0	0	
1	1	1
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9
6	36	11
7	49	13
8	64	15
9	81	17
10	100	19

Más aún, *incorporemos las diferencias de las diferencias,* como habíamos hecho en el caso de las porciones de pizza:

Tabla 6

x	x^2	Diferencia	Doble diferencia
1	1		
2	4	3	
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2
6	36	11	2
7	49	13	2
8	64	15	2
9	81	17	2
10	100	19	2

En este caso, si uno mira la tercera columna, se ve otra vez que las primeras diferencias saltan de 2 en 2. Y si uno verifica la cuarta columna, ve que las segundas diferencias dan constantemente 2.

¿Qué sugiere esto? Que si uno buscara una fórmula que permitiera calcular el número máximo de porciones que se pueden conseguir con cada corte de la pizza, convendría recurrir a alguna fórmula[20] *parecida* a la que vimos recién (en la tabla 6). Se llaman *polinomios cuadráticos o polinomios de segundo grado* (por favor, no se asuste con el nombre: es sólo *eso,* un nombre...), y el caso más general posible se obtiene así:

$$a\,x^2 + b\,x + c \qquad (*)$$

Todo lo que debemos hacer ahora es realizar ciertos reemplazos en la fórmula con algunos valores que conocemos y descubrir los que no conocemos. La *x* representa el número de cortes que uno hace, y el resultado será el número de porciones que se obtienen.

Por ejemplo, si uno reemplaza la *x* con el valor 0 (que sería equivalente a "no hacer ningún corte") (véase la tabla 1), se obtiene el resultado 1. Si uno reemplaza la *x* con el valor *1* (equivalente a hacer "1 corte"), se obtiene el resultado *2.* Si uno reemplaza la *x* con el valor *2* (equivalente a hacer "2 cortes"), se obtiene el resultado *4.* Reemplazando estos valores en (*) se obtienen estos resultados:

$$a\,0^2 + b\,0 + c = c = 1$$

$$a\,1^2 + b\,1 + c = 2 = a + b + c$$

$$a\,2^2 + b\,2 + c = 4 = 4a + 2b + c$$

[20] En realidad, estoy "conjeturando" que la fórmula que resuelve el problema es u*n polinomio cuadrático. Y, de hecho, encontramos el que da la respuesta. Pero se basó en una "conjetura mía". Si uno quisiera "demostrar" que a la solución no le queda más remedio que ser cuadrática, teniendo en cuenta que ya vimos que las diferencias son lineales, entonces se comprueba que el corte n (o el enésimo corte) no puede agregar más que n nuevas porciones, y eso ocurre esencialmente porque el mejor corte atravesará las (n-1) rectas que había, lo cual equivale a decir que cruzará exactamente por n regiones, dividiendo cada una en 2. De modo que podemos concluir que la fórmula será: P(n) = P(n-1) + n, donde P(n) indica el número máximo de regiones que se pueden conseguir con n cortes.*

Por lo tanto, se tienen estas tres igualdades:

$$c = 1$$

$$a + b + c = 2 \quad (**)$$

$$4a + 2b + c = 4$$

Juntando la primera y la segunda igualdad en (**), como el valor de *c* es *1,* la segunda fila se puede escribir así:

$$a + b + 1 = 2$$

Es decir que, si pasamos el 1 restando del otro lado de la igualdad, tenemos:

$$a + b = 2 - 1 = 1$$

O sea,

$$a + b = 1 \quad (1)$$

Si uno mira las tres igualdades de (**) se advierte que c = 1. Por lo tanto, vinculando este dato con la tercera ecuación, se deduce que:

$$4a + 2b + 1 = 4$$

O, lo que es lo mismo:

$$4a + 2b = 3 \quad (2)$$

Si ahora multiplico por 4 la igualdad (1), obtengo:

$$4a + 4b = 4 \qquad (3)$$

Luego, *restando (3) y (2),* resulta esta igualdad:

$$2b = 1 \qquad (4)$$

O, lo que es lo mismo: b = ½

Pero entonces, si *b = V,* uso la igualdad de (1) y concluyo que *a* tiene que ser V también (ya que *a + b tiene que ser 1).* Luego, juntando todo lo que aprendimos, resulta que:

$$a = ½, b = ½, y\ c = 1$$

Si ahora se fija en la fórmula (*), descubrirá que la que estábamos buscando es:

$$(½)\ x^2 + (1/2)\ x + 1$$

O lo que es lo mismo:

$$(½)\ (x^2 + x + 2)$$

¿Cómo verificar ahora que ésta es la fórmula que estábamos buscando? Reemplacemos los valores en los casos donde ya los conocemos (haga usted la cuenta).

Si x = 0, se obtiene el valor 1.

Si x = 1, se obtiene (½) (1 + 1 + 2) = 2

Si x = 2, se obtiene (½) (4 + 2 + 2) = 4

Si x = 3, se obtiene (½) (9 + 3 + 2) = 7

Si x = 4, se obtiene (½) (16 + 4 + 2) = 11... y así siguiendo.

Por lo tanto, si quisiera calcular cuál es el número máximo de porciones que puede conseguir con 50 cortes, lo que tiene que hacer es reemplazar en la fórmula obtenida la letra *x* por el número 50. ¡Y hacer las cuentas!

$$(½) (50^2 + 50 + 2) = (½) (2500 + 50 + 2) = (½) (2552) = 1276$$

El número máximo de porciones que se puede obtener con 50 cortes es 1276. Y con 100 cortes:

$$(½) (10\,000 + 100 + 2) = (½) (10\,102) = 5051$$

Problema 25
Temperaturas

En este apartado tengo dos problemas para plantearle. En ambos, lo primero que hay que hacer es decidir si tienen solución o no. Si la tienen, la/lo invito a que la encuentre, pero si cree que con alguno de ellos no es posible hallar una respuesta, será interesante que pueda explicar(se) por qué.

Acá van. En una ciudad pequeña, durante un invierno muy crudo, se registró la temperatura durante cinco días seguidos a la misma hora, las 3 de la mañana, y se descubrió que fue diferente cada día (se consideraron nada más que números *enteros,* o sea que se hicieron las aproximaciones o redondeos necesarios para no tener que medir con decimales). Las preguntas que tengo para usted son:

1. Si sabemos que al multiplicar las temperaturas de esos cinco días se obtiene el número 12, ¿es posible determinar cuáles fueron esos cinco números?
2. Si sabemos que al multiplicar las temperaturas de esos cinco días se obtiene el número 30, ¿es posible deducir cuáles fueron esos cinco números?
3. Ahora le toca a usted.

Solución.

Caso 1

Fíjese en el número 12 (que es el resultado de multiplicar las temperaturas de los cinco días). ¿De cuántas formas se podría descomponer como producto de 5 números enteros distintos? (Piense antes de seguir y vea si esta idea la/o ayuda.)

Sigo yo: uno puede "empezar" a descomponer el número 12 de la siguiente forma:

$$\mathbf{12 = 3 \times 4}$$

Pero así se advierte que hay nada más que dos números distintos. ¿Qué hacer? Podríamos agregar el 1. De esta manera tendríamos:

$$\mathbf{12 = 1 \times 3 \times 4}$$

O también podríamos plantearlos en estos términos:

12 = 1 x 2 x 2 x 3

El problema con esta última descomposición es que no se pueden repetir los números (porque todos los días hubo una temperatura distinta), entonces no serviría para resolver el problema. ¿Se puede hacer algo más? ¿O algo distinto?

Recapitulemos: la descomposición 3 x 4 es buena porque son números distintos, pero no son cinco. Lo mismo pasa con 1 x 3 x 4; también es buena, pero son sólo tres números. Y la última que consideré, 1 x 2 x 2 x 3, agrega un número más (aunque todavía no son cinco) pero no sirve porque se repite el número 2.

Acá conviene pensar un poco "mirando el costado" del problema. Evidentemente, con números positivos habría que decir que no hay una solución. Pero, claro, esto sucede porque no nos estamos permitiendo usar los números negativos. El problema decía que era invierno (como un dato adicional, pero sugerente), por lo cual las temperaturas podrían ser *bajo cero.* ¿Quiere pensar usted ahora?

Sigo: uno podría poner

12 = (-1) x 2 x (-2) x 1 x 3

¿Será la solución? Esta descomposición es buena porque contiene cinco números distintos. O sea que hemos descubierto que *una* solución posible es ésa. ¿Será la única? Es decir, ¿habrá alguna otra forma de descomponer el número 12 como producto de cinco números enteros distintos?

El único número que uno podría considerar es el (-3) en lugar del 3. Si uno hiciera eso, debería hacer desaparecer o bien el número (-1), o bien el (-2), porque, como el producto es positivo (12), la cantidad de números negativos tiene que ser par (para que se compensen entre ellos). Y claramente, si pusiera (-3) y sacara el (-1) o el (-2), entonces las descomposiciones quedarían así:

2 x (-2) x 1 x (-3),

o bien

(-1) x 2 x 1 x (-3)

En el primer caso se obtiene el número 12, pero resulta ser el producto de sólo cuatro números distintos, en lugar de los cinco que pide el problema. En el segundo caso, el resultado no es 12.

Luego, la única manera de descomponer el 12 como producto de cinco números enteros distintos es:

12 = (-1) x 1 x (-2) x 2 x 3

Caso 2

Si ahora se sabe que el producto de los cinco números es 30, ¿habrá una única solución? Es decir, si uno logra *descomponer* el número 30 como producto de cinco números, ¿será ésa la única forma de decidir qué temperatura hubo cada día?

En principio, si se lo descompone como producto de números primos positivos, uno obtiene:

30 = 2 x 3 x 5

Como hice en el primer caso, uno puede agregar el número 1, sin afectar el producto. Se tiene entonces:

30 = 1 x 2 x 3 x 5

Sin embargo, todavía no hay *cinco* números. Si quisiera agregar algún negativo, podría hacerlo de diferentes maneras. Fíjese:

30 = (-1) x 1 x (-2) x 3 x 5

O bien:

30 = (-1) x 1 x 2 x (-3) x 5

O incluso:

30 = (-1) x 1 x 2 x 3 x (-5)

Es decir, hemos conseguido tres formas de descomponer el número 30, como producto de cinco números distintos, por lo que, entonces, el problema planteado no tendría una única solución.

Todo esto está basado en lo que se conoce como el Teorema Fundamental de la Aritmética, al que me referí en el Episodio 1 de *Matemática... ¿estás ahí?* Es decir, uno *usa* el teorema inadvertidamente, porque *la* unicidad en la descomposición (o descomposiciones) es lo que permite deducir que en el caso 1 el problema tiene una solución *única,* y en el caso 2 hay *varias* soluciones.

Problema 26
10 preguntas, 1024 números

Éste es un desafío precioso. Lamentablemente, ni yo estoy allí mientras usted lo está leyendo, ni usted está ahora conmigo mientras yo lo escribo. No importa. Hagámonos concesiones mutuas y fabriquémonos nuestro mundo ideal.
Mire la tabla que figura en la página siguiente. Consiste en los primeros 1024 números naturales. No los escribo todos, pero *imagínese* que figuran allí.
Ahora, haga de cuenta que le muestra esta lista a un amigo, y pídale que elija un número cualquiera (mentalmente, sin que se lo diga a usted).
El desafío consiste en lo siguiente: usted debe averiguar qué número eligió él. Para conseguirlo puede hacerle sólo 10 (diez) preguntas, que él debe contestar con un "sí" o con un "no". ¿Se anima a diseñar una estrategia para conseguirlo?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34						
							998	999	1000
1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010
1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020
1021	1022	1023	1024						

Le aseguro que con *10* preguntas bien elegidas es posible descubrir el número que pensó su amigo. ¿Cómo hacer?
Una sugerencia: empiece proponiéndose problemas más sencillos. Es decir, con menos números... y también menos preguntas, claro.

Solución.
Como sugerí en el planteo, le propongo que primero reduzcamos la cantidad de números (y también de preguntas), para ver si con ese procedimiento *descubrimos*

qué deberíamos hacer en el caso más general de los 1024 números y las 10 preguntas.

Empiezo con el más sencillo. Supongamos que su amigo debe elegir entre dos números: el 1 y el 2, y usted puede hacerle *sólo* una pregunta. ¿Qué le diría en este caso?

La respuesta es *casi* obvia. Le podría preguntar: "¿Es el número 1?". Si le dice "sí", listo. Si le dice "no", entonces ya sabe que eligió el número 2. Es decir, en este caso particular de dos números y una pregunta es muy fácil.

Ahora, avancemos con la cantidad de números y aumentemos también las preguntas que pueden hacerse. Piense que lo que hagamos en los casos más sencillos tendrá que servir después, cuando haya muchos números entre los que se pueda elegir.

Sigo: supongamos que la lista consiste en los primeros 4 números (1, 2, 3 y 4) y usted puede hacer sólo 2 preguntas. La que usó antes ("¿Es el número 1?") no le servirá de mucho en este caso. Si su amigo contestara "sí", entonces no habría problemas, pero si dijera "no", a usted le quedaría *una* sola pregunta para decidir cuál eligió de los otros tres números posibles (descartado el 1).

Fíjese entonces que queda usted en una mala situación, porque todo lo que aprendió con la primera pregunta fue que el número elegido *no es el 1,* ¡pero nada más! O sea que obtuvo muy poca información y ya gastó una de las preguntas. De modo que hay que pensar en otra pregunta. ¿No quiere quedarse con usted misma/o por un ratito antes de seguir leyendo?

Sigo yo. Como advierte, lo ideal sería encontrar una pregunta que redujera el número de casos posibles (que ahora son cuatro) para llevarlo a dos, porque ya sabe que así puede usar una pregunta y descubrir la respuesta. Entonces, la idea es tratar de ver qué pregunta hacer primero, para reducir las opciones a sólo 2 números. Uno podría preguntar: "El número que elegiste, ¿está entre los primeros dos?". Piense usted conmigo ahora: ante cualquier respuesta que su amigo dé, usted ya logró el objetivo. ¿Por qué? Si él contesta "sí" (que está entre los dos primeros números), entonces a usted le queda una sola pregunta, es cierto, pero también sabe que el número elegido es o bien el 1 o bien el 2, con lo cual redujo el problema al caso anterior. Si en cambio le dice "no" (que no está entre los dos

primeros), eso significa que está entre los *dos segundos.* Es decir que *tuvo* que haber elegido o bien el 3 o bien el 4. Pero a usted eso no le importa, porque le sigue quedando una pregunta y hay sólo 2 números posibles.
Por lo tanto, resuelve el problema otra vez.

Moraleja hasta acá: si su amigo elige entre los primeros 4 números, usted, solamente con 2 preguntas, puede descubrir cuál es ese número.

¿Cómo seguir? Si en lugar de elegir entre los primeros 4 números naturales él pudiera elegir entre los *8* primeros (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) y usted tuviera *3* preguntas... ¿se animaría a continuar con la estrategia?
Fíjese que, hasta acá, usted puede resolver dos problemas intermedios:

1. con 1 pregunta, descubre el número si hay *sólo 2* para elegir, y
2. con 2 preguntas, descubre el número si hay *4* para elegir.

Ahora hay 8 números posibles y 3 preguntas. ¿Se le ocurre qué puede preguntar de manera tal que, en lugar de *8* números, queden 4, aunque *gaste* una de las 3 preguntas que tiene?
Y la respuesta es: sí, lo que uno podría preguntar para reducir el número posible a la mitad es: "El número que elegiste, ¿está entre los cuatro primeros?". Si la respuesta es "sí", entonces usted ya sabe que su amigo eligió entre 1, 2, 3 y 4, y como aún le quedan dos preguntas para hacerle, con eso le alcanza para resolver el problema. Si le contestara "no", entonces el número que eligió estaría entre 5, 6, 7 y 8 (otra vez 4 números) y usted tiene dos preguntas para hacer, y con eso le será suficiente. Es decir: la estrategia de preguntarle si el número que eligió está entre la primera mitad de los números, si bien reduce en uno las preguntas posibles, permite pasar al caso anterior y eso es algo que ya sabemos resolver.
Por lo tanto, en el caso original (1024 números y 10 preguntas -¿por qué 10?—), fíjese lo que sucede:

1. Con la primera pregunta (¿Está entre los primeros 512?) usted elimina la mitad de los números. Y le quedan *9* preguntas para hacer. A los efectos de continuar el razonamiento, voy a suponer que contestó “sí”.
2. Con la segunda pregunta (¿Está entre los primeros 256?) elimina otra vez la mitad de los que quedaban, y ahora le quedan *8* preguntas. Otra vez supongamos que le contestó “sí”.
3. La tercera pregunta es la misma (¿Está entre los primeros 128?) y aún le quedan 7 preguntas. Supongamos que dice “sí” otra vez, hasta el final.
4. La cuarta pregunta es: ¿Está entre los primeros 64? Y le quedan *6* preguntas.
5. La quinta es: ¿Está entre los primeros 32? Y le quedan *5* preguntas.
6. La sexta es: ¿Está entre los primeros 16? Y le quedan *4* preguntas.
7. La séptima es: ¿Está entre los primeros 8? Y le quedan *3* preguntas.
8. La octava es: ¿Está entre los primeros 4? Y le quedan *2* preguntas.
9. La novena es: ¿Está entre los primeros 2? Y le queda *1* pregunta.

Pero ya no le importa, porque con este procedimiento logró reducir los 1024 números que había originalmente a sólo 2, y todavía le queda una pregunta más para decidir cuál de los dos eligió su amigo.

¡Y ése era el objetivo que teníamos! Aprovechar que sabíamos cómo encontrar el número que el otro pensó, siempre y cuando estuviera entre *dos* posibilidades y nos quedara una pregunta por hacer.

¿No parece increíble que una persona pueda pensar un número entre 1024 y que uno pueda deducirlo utilizando únicamente 10 preguntas?

Y si en lugar de 1024 números fueran 2048, ¿está de acuerdo conmigo en que le alcanzarían 11 preguntas? Y así siguiendo: cada vez que se duplique la cantidad de números, *necesitará* aumentar en *uno* el número de preguntas.

En definitiva, la cantidad de números entre los que hay que elegir es siempre una *potencia de 2:*

$$\mathbf{2^1 = 2}$$

$$\mathbf{2^2 = 4}$$

$$\mathbf{2^3 = 8}$$

$$\mathbf{2^4 = 16}$$

$$\mathbf{2^5 = 32}$$
$$\mathbf{2^6 = 64}$$
$$\mathbf{2^7 = 128}$$
$$\mathbf{2^8 = 256}$$
$$\mathbf{2^9 = 512}$$
$$\mathbf{2^{10} = 1024}$$
$$\mathbf{2^{11} = 2048...}$$

y el número de preguntas que se necesita es el *exponente* de esa potencia de *2.* Por ejemplo, para 64 números hacen falta *6* preguntas. Si alguien hubiera elegido un número entre los primeros 2048, entonces harían falta *11* preguntas. Y así siguiendo.

Variante 2

Le pido ahora que pruebe resolver el siguiente caso: prepare una lista con los primeros 100 números. Yo elijo uno. Ahora le pido que diseñe una estrategia para poder encontrarlo haciéndome preguntas como las que vimos más arriba, y verá que necesita *7* (como si fueran 128 = 2^7).

Variante 3

Manu Ginóbili realizó una observación muy interesante: si a uno le dieran a elegir entre 1025 números (o sea, uno más que los 1024 originales), las 10 preguntas ya no serían suficientes. Harían falta *¡11!* Pero hay algo todavía mejor: si en lugar de 1025 fuera el doble de 1024, o sea 2048 números, *¡también alcanzaría con 11 preguntas!* Es decir, agregar un número o 1024 más obliga (con esta estrategia) a agregar ¡una sola pregunta más!

Variante 4

Si bien yo elegí 1024 números, que es 2^{10} y, por lo tanto, una potencia de 2, uno podría jugar permitiendo que su amigo eligiera el número entre una cantidad cualquiera, digamos entre *n* números. En ese caso, ese número será una potencia de 2 o bien, si no lo es, deberá estar entre dos números que *sí* sean potencias de 2:

$$2^{k-1} < n < 2^k$$

Y alcanzarán *k* preguntas para averiguar el número que eligió.

Problema 27
Una joyita de la lógica

Este libro contiene muchos problemas que desafían la mente. La entrenan para "pensar distinto", para recorrer caminos inexplorados que tienen como objetivo fascinarnos, de una u otra forma. Con ese propósito quiero ahora hacer una pregunta que quizá *parezca ingenua,* pero que conlleva un muy bonito ejercicio de lógica. Sígame por acá.

A la salida de un cine, una compañía encuestó a 100 personas y obtuvo los siguientes resultados:

- 60 usaban *jeans* azules.
- 75 tenían computadora propia.
- 85 usaban zapatos negros.
- 90 usaban un anillo.

La pregunta que tengo para hacerle es: de los 100 encuestados, ¿cuál es el número *mínimo* de personas que tenían los cuatro objetos? O sea, el número mínimo de personas que vestían *jeans* azules, tenían computadora, llevaban zapatos negros y usaban un anillo.

Solución.

Es muy posible que usted haya pensado diferentes maneras de abordar este problema. A mí me llevó bastante tiempo encontrar una solución que me dejara satisfecho, por lo que le voy a presentar la respuesta que me pareció más atractiva por lo *económica,* en el sentido de que no requiere muchos pasos llegar a ella. Con todo, quiero mostrarle cuál fue mi razonamiento ya que, una vez que entienda el camino que elegí, podrá deducir el resto (si quiere) sin leer lo que sigue.

El objetivo es decidir cuál es el *mínimo* número de personas que forzosamente tienen que tener los cuatro objetos. Para empezar, de las 90 personas que usan un anillo, ¿cuántas están obligadas a usar zapatos negros? Fíjese que 85 usan ese color de zapatos. ¿Qué nos dice esto? Por supuesto, las 85 personas que usan los zapatos negros podrían estar entre las 90 que tienen un anillo... pero esto no es forzosamente cierto.

En cambio, si uno tratara de encontrar cuántas están obligadas a tener anillo y zapatos negros, la historia cambia. ¿Por qué? Supongamos que los 10 que no usan anillo[21] tienen zapatos negros.

Todavía nos quedan 75 que tienen este color de zapatos y que van a estar obligados a usar anillos también. O sea que, de los 90 que usan anillo, hay 75 que llevan zapatos negros.

Primera conclusión: Tenemos -al menos- 75 personas que usan ambas cosas: anillo y zapatos negros. Por lo tanto, hay 25 personas que o bien no usan anillo o bien no usan zapatos negros.

Sigo. Ahora me fijo en los 75 que tienen computadora propia. De esos 75, podría suceder que 25 estuvieran entre los que no tienen anillo o no usan zapatos negros. Pero igualmente quedan 50 que tienen computadora propia y que inexorablemente van a tener que usar anillo y zapatos negros.

Segunda conclusión: Hay 50 personas que tienen las tres cosas: computadora, zapatos negros y anillo.

Y falta usar el último dato: hay 60 personas que usan *jeans* azules. Lo mejor que nos podría pasar es que de esas 60 haya 50 que sean las que no tienen computadora, o bien zapatos negros, o bien anillo. Supongamos que eso fue lo que sucedió. Pero, aun así, ¡restan 10 personas a las que no les quedará más remedio que tener los cuatro objetos: computadora, anillo, zapatos negros y también *jeans*!

Moraleja: Hay por lo menos 10 personas que deben tener los cuatro objetos. Y ésa es la respuesta al problema. Podría ser que fueran más, claro está.

El máximo de personas que podría tener los cuatro objetos es (¿lo quiere pensar?)... 60, porque podría suceder que las 60 que

[21] Tienen que ser 10 porque había 100 encuestados y sabemos que 90 usaban un anillo.

usan *jeans* azules tuvieran computadora, llevaran anillo y además zapatos negros. Pero no más de 60 podrán tener los cuatro objetos, porque no hay más que 60 con ese color y tipo de pantalón.
Entonces, el máximo posible de personas que pueden tener los cuatro objetos es 60. Y el mínimo, 10.

Otra forma de llegar a la solución

Quiero encontrar ahora una respuesta más constructiva, explorando las distintas posibilidades de las personas encuestadas. De todas formas, le pido un favor: concédame que, para no tener que escribir tanto texto, plantee los términos así:

A: zapatos negros B: computadora propia C: *jeans* azules D: anillo

Gracias. Ahora, recorramos las distintas posibilidades.

Paso 1: De las 100 personas, para empezar: 85 tienen A y 15 no tienen nada (todavía).

Paso 2: Hay 75 que tienen B. Los distribuyo así (tratando de que haya la menor cantidad posible que posean ambas cosas). A las 15 que no tenían nada (paso 1) les adjudico B. Pero, inexorablemente, las 60 que quedan (ya que 15 + 60 = 75) tendrán que tener A también. En consecuencia, el panorama es el siguiente:

60 tienen A y B 25 tienen A solamente 15 tienen B solamente

Paso 3: AHORA SABEMOS QUE HAY 60 PERSONAS QUE TIENEN C. Una vez más, voy a tratar de encontrar el *mínimo* posible de personas que tengan *los tres objetos.*

De las 60 que tienen C, dispongo que 25 tengan A y C solamente, y que 15 tengan sólo B y C. De esta forma, distribuí 40 (25 + 15) de las 60 que tenían C. Pero me faltan 20 que inexorablemente tendrán que tener A, B y C. Resumo hasta acá:

20 tienen A, B y C

40 tienen A y B (1)

25 tienen A y C 15 tienen B y C

Paso 4 (y último): Ahora, y como final, sabemos que hay 90 personas que tienen D. Una vez más, quiero encontrar el mínimo número de personas que tengan los cuatro objetos (A, B, C y D). De estas 90 (sugiero que mire el resumen que figura en (1)), puedo incluir 15 entre los que tienen B y C, 25 que tienen A y C, y 40 que tienen A y B. Pero esta suma (15 + 25 + 40) da como resultado 80. Y todavía me faltan 10 personas que tienen D y que no distribuí. Y aquí es donde se ve *que no queda más remedio* que ¡esas 10 personas que faltan tengan A, B, C y D! Y esto responde el problema.

Quizás usted encontró otro camino, más económico o más corto. En cualquier caso, es siempre valioso advertir que este problema únicamente requiere pensar. Nada más que eso (nada menos, también).

Problema 28
¿Puede ser *(n + 1) = n?*

Sígame con el siguiente argumento, a ver si descubre dónde está el error. Como *tiene* que haber un error, le propongo que lo busque hasta encontrarlo, y que no se dé por vencido rápidamente.

Tome cualquier número natural n. Le recuerdo que los números naturales son: 1, 2, 3, 4,... Ahora bien: verifique la siguiente fórmula, que sólo consiste en elevar el número (n + 1) al cuadrado:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Basta hacer la cuenta para convencerse del renglón anterior. Ahora bien, pasando de miembro (2*n* + 1) se obtiene:

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2$$

Restando de ambos lados *n* (2n + 1),

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) - n (2n + 1) = n^2 - n (2n + 1)$$

O sea, sacando (2n + 1) como factor común en el miembro de la izquierda,

$$(n + 1)^2 - (n + 1) (2n + 1) = n^2 - n (2n + 1)$$

y sumando

$$(1/4) (2n + 1)^2$$

en ambos lados, se obtiene ahora

$$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + (1/4)(2n + 1)^2 =$$

$$= n^2 - n(2n + 1) + (1/4)(2n + 1)^2 \quad (*)$$

Usted puede verificar ahora que el término de la izquierda de (*)

$$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + (1/4)(2n + 1)^2$$

es igual a

$$[(n + 1) - (1/2)(2n + 1)]^2$$

mientras que el término de la derecha de (*) es igual a

$[n - (1/2)(2n + 1)]^2$

Por lo tanto, la fórmula (*) se puede *reescribir* así:

$$[(n + 1) - (1/2)(2n + 1)]^2 = [n - (1/2)(2n + 1)]^2 \quad (**)$$

Sacando raíces cuadradas de ambos lados, tenemos

$$[(n + 1) - (1/2)(2n + 1)] = [n - (1/2)(2n + 1)] \quad (***)$$

O sea, observando que el término

$(1/2)(2n + 1)$

aparece restando en ambos lados, se lo puede simplificar y, por lo tanto, se obtiene la siguiente extraña igualdad:

$$(n + 1) = n$$

Esta última afirmación no puede ser cierta. No puede ser verdad que *(n* + 1) = *n.* Entonces, ¿de dónde surge esta contradicción? Se lo dejo para que lo piense por su cuenta. ¿Dónde está el error? Porque, como escribí más arriba, *tiene* que haber un error. Pero ¿en qué paso?

Solución.

Quiero recordar aquí algo muy importante. Así como *no se puede dividir por "cero",* tampoco se puede "sacar raíces cuadradas libremente". Es decir, "la" raíz cuadrada de un número *a* es *"el **Único número positivo** b",* tal que $b^2 = a$.

Inmediatamente después del paso (**), donde dice: "sacando raíces cuadradas de ambos lados", uno debería tomar la precaución de comprobar que los dos números que aparecen entre corchetes en (***) sean *positivos*. No alcanza que dos números elevados al cuadrado sean iguales para deducir que los números sean iguales. Por ejemplo,

$$\mathbf{1^2 = (-1)^2}$$

ya que ambos son iguales a 1. Sin embargo, el número que está "dentro del paréntesis" (-1) y el 1 *¡no son iguales!*

Vuelvo a la fórmula (**). Los dos números que aparecen allí,

$$\mathbf{[(n + 1) - (½) (2n + 1)]}$$

y

$$\mathbf{[n - (½) (2n + 1)]}$$

cuando son elevados al cuadrado resultan ser iguales.

Pero, para poder deducir que son *iguales,* hace falta comprobar que sean ambos positivos o ambos negativos.

El primero,

$$[(n + 1) - (½) (2n + 1)] = n + 1 - n - ½ = 1 ½ = {}^{1}/_{2},$$

es *positivo.* En cambio, el segundo,

$$[n - (½) (2n + 1)] = n - n - ½ = - ½$$

es *¡negativo!* Por lo tanto, *no se puede sacar la raíz cuadrada de ambos lados en este caso.*

En consecuencia, la igualdad que se concluye después de la fórmula (**) ¡es falsa! Y la cadena de igualdades que siguen al *error* cometido en ese paso permite concluir que (n + 1) = n, lo cual es *falso* también.

Moraleja: Lo más importante de todo esto es *aprender* que existen dos raíces cuadradas de un número positivo: una de ellas es un número positivo y la otra es un número negativo.

Problema 29
Cuatro parejas invitadas a una fiesta y la dueña de casa

El siguiente problema es de verdad extraordinario. Le cuento brevemente cómo tropecé con él. En febrero de 2009, en el marco de las conferencias TED (Technology, Entertainment, Design), en California, uno de los expositores era Dan Ariely, profesor en el MIT (Instituto de Tecnología de Massachusetts, en Cambridge, muy cerca de Boston). Yo había leído su último libro, *Predictably Irrational* (o sea, *Predeciblemente irracional),* y me despertaba mucha curiosidad escucharlo hablar. No sólo no me defraudó durante los dieciocho minutos que duró su charla, sino que fue uno de los más aplaudidos.

Poco tiempo después, revisando su página web y su historia, encontré el problema que voy a contar acá y que me pareció extraordinario. Ahora bien: ¿por qué *extraordinario'?* Bueno, creo que cuando uno da con un problema cuya solución le parece *imposible* con los datos ofrecidos, termina poniéndolo en una categoría distinta de la de la mayoría de las cosas que uno piensa habitualmente.

Es decir, puede ocurrir que un problema cualquiera sea muy difícil, con una solución esquiva o potencialmente imposible de encontrar. Pero eso sólo habla de que algunas veces no tenemos el entrenamiento suficiente para abordarlo. Diferente es el caso cuando uno está convencido de que los datos que le dieron no serán suficientes para dar con la respuesta. Eso lo ubica en una categoría distinta. Y justamente este problema pertenece a un departamento diferente.

No sé si el autor original es Ariely. Más aún: no lo creo. Pero es irrelevante. Yo lo vi por primera vez en un material suyo y luego no encontré otra fuente en la que se hiciera referencia a quien lo había planteado por primera vez. Acá va. Eso sí: léalo con atención (es verdaderamente sencillo... al menos de comprender, y después se transforma en algo entretenidísimo para pensar).

Una pareja se mudó a una ciudad donde no conocía a nadie. Con la idea de relacionarse y hacer amigos, ambos decidieron poner un aviso en el diario local, en el que invitaban a parejas de edades parecidas a las de ellos (entre 20 y 40 años) para que asistieran a una fiesta en su casa el viernes siguiente a las 8 de la noche.

Llegó el día viernes y a las 8 se presentaron *cuatro* matrimonios. De esta forma, entre los dueños de casa y los visitantes había 10 personas. Nadie conocía a nadie (salvo los miembros de cada pareja entre sí). El dueño de casa pidió a todos los participantes (9, porque él se excluyó) que se acercaran a las personas *que no conocían,* se presentaran y se dieran la mano (por supuesto, con la excepción del marido y/o mujer de su propia pareja).

Después de unos pocos minutos, el dueño de casa intervino otra vez y les pidió que se detuvieran. Que no se saludaran más, ya que él quería preguntarle a cada uno a cuántas personas había saludado hasta ese momento (estrechándole la mano, se entiende).

Obtuvo 9 (nueve) respuestas diferentes entre sí: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, entendiendo que la persona que contestó *cero* lo hizo porque todavía no había alcanzado a saludar a nadie. Otra le dijo: "Saludé *exactamente* a una persona"; otra: "Saludé *exactamente* a *dos* personas", y así hasta que la última le contestó que había saludado *exactamente a ocho personas* (que corresponderían a los integrantes de las otras cuatro parejas).

La pregunta es: ¿cuántas manos estrechó la mujer del anfitrión? O mejor dicho, ¿a cuántas personas saludó la dueña de casa? Ya sé, parece imposible que uno pueda deducir la respuesta, pero créame que *sí se puede.* Ahora es su turno.

Solución.

Para poder abordar este problema, le propongo que reduzcamos inicialmente el número de parejas que llegaron a la fiesta y veamos qué sucede. Para eso, pensemos que solamente se presentó una pareja (además de los dueños de casa). En este caso, cuando el dueño propuso que todos se saludaran, obtuvo estas respuestas:

1. Yo no saludé a nadie todavía (0 saludos).
2. Yo saludé exactamente a *una* persona (1 saludo).
3. Yo saludé exactamente a *dos* personas (2 saludos).

¿Se puede ahora contestar a cuántos saludó la dueña de casa?

Veamos:

a) Si ella contestó "no saludé a nadie", entonces, ¿quién hubiera podido decir que saludó a 2 personas? Ciertamente, ninguno de los dos invitados, porque como entre ellos no se saludaban, si tampoco saludaron a la dueña de casa, sólo pudieron haber saludado al dueño de casa. Luego, esta alternativa *no* es posible.
b) Si ella hubiera contestado que saludó a 2 personas, eso significaría que tuvo que haber saludado a los dos integrantes de la pareja invitada (porque no pudo haber saludado a su marido). Pero, si es así, ninguno de los integrantes de la pareja invitada pudo haber dicho "no saludé a nadie". O sea, este caso *tampoco* es posible.

En consecuencia, la única alternativa que le queda a la dueña de casa es haber dicho: "Yo saludé exactamente a una persona". Y eso resuelve el problema. (Si quiere pensar un poquito más, uno de los integrantes de la pareja invitada saludó a 2 personas, que debieron haber sido los dueños de casa, mientras que el otro integrante de la pareja invitada *no saludó a nadie.)*

Hasta acá, entonces, hemos resuelto el problema en el caso de una sola pareja. ¿Qué pasa ahora si en lugar de una pareja invitada vienen dos? ¿Se puede contestar la pregunta? Lo que conviene recordar acá es que las respuestas que obtuvo el dueño de casa son: 0, 1, 2, 3 y 4. Es decir, una persona que no saludó a nadie, otra que saludó exactamente a 1 persona, otra exactamente a 2... hasta llegar a una de ellas que saludó exactamente a 4 personas. ¿A cuántas tuvo que haber saludado la dueña de casa?

Acá, como antes, la/lo invito a pensar. Y cuando quiera, lea lo que sigue. Eso sí: trate de ver si puede relacionar el caso de las dos parejas con el caso anterior. Usted ya conoce la solución si hubiera una sola pareja invitada.

Sigo yo. Fíjese que la dueña de casa no pudo haber dicho que saludó a 4 personas, porque, si no, ¿quién podría haber dicho que no saludó a nadie? Claramente, además, como ella no saludó a su marido, sólo podría haber registrado 4 saludos de haber saludado a los 4 integrantes de las dos parejas.

Entonces, uno de los integrantes de alguna de las dos parejas fue el/la que dijo que saludó a 4. Y esos 4 tuvieron que haber sido los dos dueños de casa y los

integrantes de la otra pareja. Esto último (el hecho de que esta persona hubiera saludado a los dueños de casa y a los integrantes de la otra pareja) dice que ninguno de ellos pudo haber dicho que no saludó a nadie.
Entonces, ¡lo tuvo que haber dicho *su pareja*! Es decir, los integrantes de una de las parejas son los que contestaron 4 y 0. Los llamo A y B.
Quitémoslos por un momento de la escena. Sí, hagamos de cuenta que esta pareja A-B no existe. ¿Quiénes quedan ahora? Los dueños de casa y los integrantes de la otra pareja. Por descarte, esas personas son las que saludaron a 1, 2 y 3 personas.
Si ahora el dueño de casa reformulara la pregunta y le pidiera a cada uno que ignorara haber saludado a A, y que le dijera a cuántas personas saludó, ¿qué pasaría? En este caso, el que dijo 1 diría 0, el que dijo 2 diría 1 y el que dijo 3 diría 2.
Es decir, habríamos convertido el problema de dos parejas invitadas en el de una pareja invitada. Y ese problema es el que ya sabemos cómo resolver. Y sabemos, entonces, que la dueña de casa contestó que saludó a 1 persona. Por lo tanto, en este caso, el de las dos parejas, la mujer tuvo que haber sido la que contestó que saludó a 2 personas.
A esta altura, estoy seguro de que ya entiende de qué se trata el caso más general. Si en lugar de dos parejas invitadas hubieran respondido tres parejas, las potenciales respuestas habrían sido: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. La dueña de casa, igual que en el ejemplo anterior, no podría afirmar que saludó a *6* personas (porque, entonces, *nadie* podría haber contestado *0).* Luego, los integrantes de alguna de las parejas son los que tienen que haber contestado *6 y 0.* Uno los saca a ambos y entonces se queda sólo con dos parejas, en lugar de tres, y en ese caso ya sabe que la dueña de casa saludó a *2.* Ahora, agregando la pareja que falta, la respuesta que tuvo que haber dado la mujer es *3.*
Acá conviene hacer una breve observación: en el caso de una pareja, la mujer saludó a 1 persona. En el caso de dos parejas, a 2 personas. En el caso de tres parejas invitadas, a 3 personas. La idea general es que en el caso de *cuatro* parejas, la mujer debió haber dicho que estrechó *4* manos. Y este caso, el de las cuatro parejas, se puede generalizar a tantas parejas como uno quiera. Si hubieran aceptado la invitación *veinte* parejas, y si cada uno de ellos hubiera contestado

(invitados por el dueño de casa) que saludaron a: 0, 1, 2, 3, 4, 5,..., 38, entonces, la dueña de casa debió haber saludado a *20* personas. Más aún, ella saluda a un integrante de cada pareja y al otro no.

Este procedimiento, conocido como *recursión,* consiste en reducir un caso más complejo a uno más sencillo, y aprovechar lo que uno aprende en esa situación para luego *obtener una fórmula general* que resuelva todos los casos.

Problema 30
La historia de los cuatro azulejadores

Muchas veces en la vida cotidiana uno tiene que optar entre dos, tres o más personas que se proponen para realizar un trabajo. Cada una de ellas ofrece ventajas y desventajas. Por ejemplo, algunos pueden completar el trabajo más rápidamente y por eso cobran más. Otros, en cambio, necesitan más tiempo, tardan más y quizá por eso cobran menos. ¿Cuál elegir? ¿Qué criterio usar?

Más aún, ¿y si uno pudiera contratar a dos (o más) para que trabajaran simultáneamente? ¿En cuánto se abrevia el tiempo que necesitan para llevar a cabo la tarea?

El siguiente problema sirve para abordar este tipo de casos. Es ficticio, claro está, pero muy útil para aprender a pensar (y resolver) esas situaciones. Acá va.

Las autoridades de un colegio estaban orgullosas del patio que tenían. Más de mil alumnos pasaban horas disfrutándolo en sus distintas actividades. Pero el uso tan masivo ponía a esas mismas autoridades en la necesidad de azulejarlo cada tres años. Un negocio de la zona les ofrecía los servicios de cuatro diferentes azulejadores. Cada uno trabajaba a su propio ritmo y, naturalmente, cobraba de acuerdo con esa variante. Es decir, como azulejaban a distintas velocidades, el que trabajaba más rápido para cumplir con el mismo trabajo cobraba más.

Llamemos A, B, C y D a los cuatro trabajadores. El detalle de las velocidades es:

- A podía azulejar el patio en 2 horas,
- B necesitaba 3 horas,
- C, en cambio, tardaba 4 horas, y por último
- D, que era el más lento (y quien cobraba menos), utilizaba 6 horas.

Tengo un par de preguntas para hacer. La primera es: ¿cuánto tardarían en azulejar el patio si trabajaran todos juntos? Como la otra pregunta se relaciona con la respuesta a la primera, la dejo para después, en el apartado de las soluciones.

Soluciones.

Antes de escribir una manera de llegar a la respuesta, le propongo lo siguiente (si es que aún no lo hizo): trate de pensar qué porción de patio estaría azulejada si trabajaran todos juntos *durante una hora.* Fíjese en lo siguiente: si A trabajara solo, como el dato que tenemos es que en 2 horas terminaría todo, en 60 minutos (1 hora) azulejaría la mitad, o sea 1/2 de patio. Con la misma idea, como a B le llevaría 3 horas, en 60 minutos azulejaría 1/3 de patio. Por su parte, C (que tarda 4 horas en azulejarlo por completo) en una hora podría cumplir con la cuarta parte, o sea, 1/4 de patio. Por último, el azulejador D, el más lento de todos, que necesitaría 6 horas para cumplir con el trabajo, en 60 minutos habría azulejado 1/6 de patio.
Es decir, si ahora trabajaran todos juntos, en 60 minutos habrían azulejado:

1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/6 de patio

¿Cuánto es este número? O sea, ¿qué significa 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/6? Calculémoslo.
Para poder *sumar* estos cuatro números, voy a *igualar todos los denominadores.*[22]
Es decir, necesito poder escribir los números 1/2 + 1/3 + 1/4 y 1/6 con el mismo denominador. Entonces, establezco lo siguiente:

1/2 =	6/12
1/3 =	4/12
1/4 =	3/12
1/6 =	2/12

Luego, si quiero sumar

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/6 = 6/12 + 4/12 + 3/12 + 2/12 = 15/12 = 5/4$$

Hemos descubierto entonces que, en *una hora,* trabajando juntos, los cuatro azulejadores habrán azulejado 5/4 de patio. Pero uno advierte que 5/4 de patio ¡es más que un patio! Es decir, si los cuatro trabajaran juntos durante una hora

[22] Éste es el procedimiento que se conoce como "buscar un denominador común".

azulejarían más de lo necesario. Lo que debemos hacer, en consecuencia, es tratar de descubrir *cuánto menos* de una hora necesitarían.

Una forma sencilla de resolver esto es plantear: si azulejan 5/4 de patio en 60 minutos, para azulejar 4/4 (o sea, *un* patio) necesitarán *x* minutos. ¿Cómo calcular *x?*

5/4 -> 60 minutos

4/4 = 1 x minutos

Luego:

x = (60 x 1)/(5/4) = (4 x 60)/5 = 48[23]

Y ésa es la respuesta que buscábamos: si los cuatro trabajaran juntos tardarían ¡48 minutos!

Otra forma de pensarlo: una vez que uno sabe que los cuatro juntos azulejarán 5/4 de patio en 60 minutos, ¿cuánto tiempo les llevará azulejar 1/4 de patio? Es decir, si necesitan 60 minutos para 5/4, para azulejar 1/4 necesitarán 1/5 parte del tiempo. ¿Cuánto es 1/5 parte de 60 minutos? Esto es:

60/5 = 12

Entonces, en 12 minutos azulejan 1/4 de patio. Para completar el trabajo, necesitamos 4 veces 12 minutos, que (como era esperable) es igual a 48 minutos.

Ahora que ya sabemos la respuesta a la primera pregunta de cuánto tardarían todos juntos, le planteo la segunda: ¿habrá alguna forma de que sólo entre tres puedan azulejar el patio en menos de una hora también?

Veámoslo. Leyendo lo que escribí más arriba, sabemos que en una hora:

- A azulejaría 1/2 de patio,

[23] Este método se conoce como "regla de tres simple" o bien "de proporcionalidad", de modo tal que si se conocen los números a, *b* y n, y se sabe que cumplen con las siguientes relaciones:

a ->n

b ->x

entonces, uno puede deducir el valor de x de la siguiente forma: x = (b n)/a

- B azulejaría 1/3, y
- C azulejaría 1/4.

Si ahora trabajaran los tres juntos, en una hora azulejarán:

$$1/2 + 1/3 + 1/4 = 6/12 + 4/12 + 3/12 = 13/12$$

Es decir, si A, B y C trabajaran juntos, lograrían azulejar el patio *en menos* de una hora y, encima, no necesitarían que participara D.
¿De cuántas otras formas se pueden elegir tres de los cuatro azulejadores para que azulejen el patio en una hora o menos?
Recién elegí A, B y C, y vimos que entre los tres podrían azulejar el patio en menos de una hora. Quedan otras tres posibilidades:

1. A, B y D
2. A, C y D
3. B, C y D

1) Si trabajaran A, B y D, en una hora azulejarían:

$$1/2 + 1/3 + 1/6 = 3/6 + 2/6 + 1/6 = 6/6,$$

o sea, exactamente un patio entre los tres en una hora.

2) Si trabajaran A, C y D, en una hora azulejarían:

$$1/2 + 1/4 + 1/6 = 6/12 + 3/12 + 2/12 = 11/12$$

Es decir, en este caso, como 11/12 es más chico que *1,* entonces estos tres trabajando juntos no alcanzarían a azulejarlo en menos de una hora.

3) Con B, C y D, antes de hacer la cuenta, uno ya *sabe* que no alcanzarán a azulejarlo en una hora. ¿Por qué? Es que en el caso anterior, cuando en lugar de B integraba la terna A, vimos que ya no alcanzaba. Con más razón no va a alcanzar ahora, que reemplazamos a A por B, quien trabaja más lento. Igualmente, la cuenta para convencerse es la siguiente: si trabajaran B, C y D, en una hora azulejarían:

$$1/3 + 1/4 + 1/6 = 4/12 + 3/12 + 2/12 = 9/12 = 3/4$$

Luego, como era esperable, no alcanzaría, ya que en una hora sólo azulejarían 3/4 partes del patio.

Problema 31
Estrategia para ganar siempre

Hace muchos años (alrededor de 1985) compartía un espacio con mis queridas amigas Alicia Dickenstein y Carmen Sessa, que además son magníficas matemáticas. Todos los días usábamos ese espacio para pensar nuestras clases, discutir problemas comunes de nuestras investigaciones, corregir exámenes, revisar potenciales soluciones, cursar algunas materias que nos interesaban... algo así como vivir la vida de tres profesores universitarios en un lugar extraordinario como es la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA.

Un mediodía, Carmen llegó con un problema que le había planteado un alumno. Más que un problema era el diseño de una estrategia para ganar siempre en un juego que él le había contado. Lo que nos planteamos los tres era si "tal" estrategia existía o podía existir. Lo que sigue, entonces, es el relato de lo que sucedió ese mediodía de hace más de veinte años.

El juego consistía en lo siguiente: hay dos personas sentadas frente a una mesa rectangular.[24] Cada una tiene una cantidad de monedas, todas del mismo tamaño, que le permitirían cubrir la totalidad de la mesa si quisiera. Cuando le toca el turno, cada jugador apoya una moneda arriba de la mesa, sin superponerse con las otras. No importa que esté *totalmente apoyada,* lo que sí hace falta es que la moneda no se caiga de la mesa. Por ejemplo, uno podría apoyarla en el borde, pero tiene que tener la garantía de que no se caerá. Se van alternando los turnos hasta que, en un determinado momento, ya no hay más espacio para apoyar monedas sobre la mesa (sin que se caigan o se superpongan). El participante que se quede sin lugar para apoyar una moneda pierde.

La pregunta es: si usted fuera, de los dos jugadores, el que pone la primera moneda sobre la mesa, ¿sería capaz de diseñar una estrategia que le permitiera ganar siempre, independientemente de lo que hiciera su rival?

[24] Elegí una mesa rectangular para proponer una manera de jugar, pero uno podría preguntarse qué pasaría con otro tipo de mesas. Para que la estrategia tenga sentido, *hace falta que la mesa sea simétrica.* No necesariamente tiene que ser un rectángulo. Podría ser cualquier polígono regular, o un círculo, o una elipse incluso, pero simétricos.

Como escribí más arriba, uno podría cuestionarse si *tal estrategia* existe. La/lo dejo con usted mismo. Piénselo, porque es un problema entretenido.

Solución.

Quiero sugerirle acá una idea de manera tal que pueda seguir pensando el problema por su cuenta, sin leer la solución hasta el final. Le propongo lo siguiente: piense qué pasaría si el primer jugador ubica la primera moneda *exactamente* en el centro de la mesa. Como ésta es rectangular, tiene que haber un lugar donde se crucen las dos diagonales (como se ve en la figura 1).

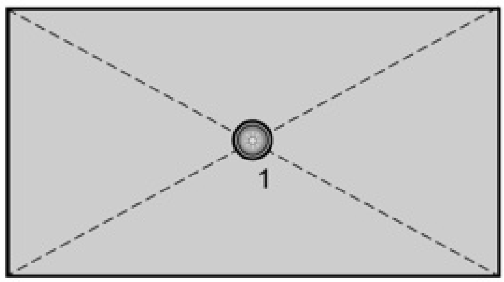


Figura 1

Allí coloca la moneda el primer participante. Ahora, ¿le garantizará esto que va a ganar siempre?

Fíjese lo que pasará cuando le toque jugar al segundo participante: él pondrá la moneda en cualquier lugar de la mesa. ¿Qué tendría que hacer el primer jugador en su próximo movimiento?

Fíjese en la figura 2. Hay una moneda que colocó el primer participante en el centro de la mesa y una segunda moneda puesta arbitrariamente en cualquier lugar.

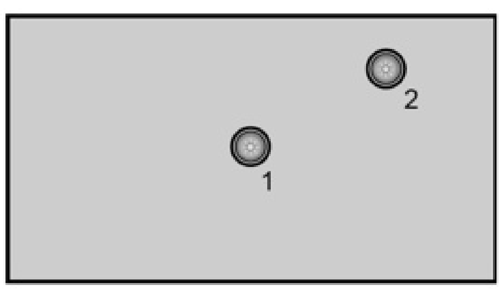


Figura 2

El primer jugador "imagina" un segmento que une el centro de la moneda que colocó el segundo participante y el centro de la moneda que está en el medio de la mesa. Y entonces prolonga "imaginariamente también" ese segmento hacia el otro lado, hasta alcanzar la misma longitud. Allí coloca su moneda (figura 3). O sea, estas últimas dos monedas están ubicadas "simétricamente" respecto del centro de la moneda original.

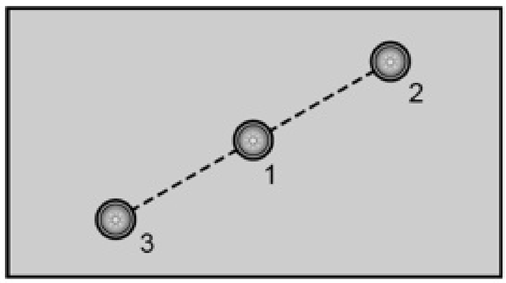


Figura 3

Y así siguiendo. Es decir, lo que el primer jugador debe hacer es *replicar* todo lo que hace su contrincante, pero en el lugar simétrico, como acabo de indicar más arriba. Si el primer jugador procede así después de haber colocado la primera moneda en el centro de la mesa, ¿puede garantizarse que ganará siempre?

Respuesta: Sí. Ganará siempre.

¿Por qué? Porque, si hay lugar para que el segundo participante ubique una moneda, entonces el primer participante tendrá espacio para colocar su próxima moneda en el lugar simétrico. Y cuando llegue el momento en que quede poco lugar en la mesa, si el segundo jugador pudo apoyar una moneda que, aunque tambaleante, se queda quieta, entonces el primer jugador podrá copiar en el lugar simétrico el movimiento de su adversario.

En definitiva, el primer jugador siempre tendrá lugar para ubicar una moneda más, si es que el segundo pudo colocar la suya en la jugada anterior.

Moraleja: El primer jugador sabe que si juega con esta estrategia siempre va a ganar.

Problema 32
Los soldados de Conway

Lo que sigue es *pura* matemática. Parece disfrazada de "juego de damas", o mejor dicho de soldados, pero no le crea: es una manera más de hacer matemática.

Este comentario viene a cuento por la percepción que en general se tiene de la matemática. Al leer lo que figura más abajo, verá que también usted empieza a dudar. Es decir, creerá que estoy exagerando, porque lo que sigue se parece mucho a cualquier juego que requiere un tablero (ajedrez, ludo, damas, etc.). Intuyo que más o menos todos hemos estado involucrados en alguno de ellos alguna vez en nuestras vidas.

Por supuesto, no digo que esto sea (ni mucho menos) lo único que hay o habría que enseñar de matemática, pero si en los colegios y escuelas uno mostrara que "hacer matemática" es también pensar soluciones de juegos como los que figuran más abajo, y/o diseñar estrategias para ver si un problema tiene solución, apuesto a que los jóvenes (a quienes no culpo de ninguna forma) que hoy detestan esta materia o que no saben cómo hacer para *zafar* de las horas de matemática que tienen que cursar inexorablemente... estoy seguro, decía, de que todos (o casi todos) tendrían un interés distinto.

Por otro lado, ¿a quién no le gusta jugar? ¿Quién no jugó alguna vez a algo? ¿Por qué el jugar y el pensar, o el disfrutar con la mezcla de ambos, no forma parte de nuestros programas de matemática en las etapas de formación?

El problema que sigue fue inventado por el excelente matemático inglés John Conway, del cual hablé alguna vez en el "Juego de la vida" (véase *Matemática... ¿estás ahí? Episodio 3,14.,* p. 114). En el mundo se lo conoce como el problema de "Los soldados de Conway".

Si bien no hace falta para entender el planteo, es útil haber jugado alguna vez a las damas,[25] simplemente porque ésa es la forma en la que uno avanza con sus piezas, saltando por encima de otras (a las que *quita* del juego). Pero no se preocupe si

[25] O al Senku, para aquellos que alguna vez pudieron jugar a este juego, un poco más popular en Europa que en América.

usted nunca jugó a las damas, porque no le acarrea ninguna desventaja. De todas formas, a diferencia de las damas, aquí hay *un solo jugador.*

Lo que Conway propuso fue lo siguiente: imagine que tiene un tablero de ajedrez, pero infinito*.* Escribo la palabra *infinito* porque estoy pensando que, en lugar de ser un tablero común de 8 x 8, éste se extiende indefinidamente hacia derecha e izquierda, y también hacia arriba y abajo. En lugar de 16 piezas, como en el juego de damas, usted tiene a su disposición *la cantidad de piezas que quiera.* Justamente Conway llama "soldados" a estas fichas, y de ahí el nombre del juego. Ahora haga de cuenta que hay una línea divisoria horizontal que separa el tablero en dos: la parte de "arriba" y la de "abajo".

En la parte de arriba no hay ningún soldado. Está todo vacío. En cambio, en la parte de abajo, usted puede usar las piezas que quiera. Para poder avanzar en el tablero (como en las damas), se trata de saltar por encima de una ficha en forma horizontal o vertical, siempre y cuando uno aterrice en un lugar vacío y la pieza sobre la que saltó quede excluida del juego.

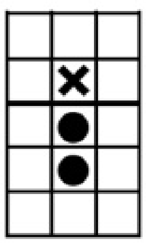


Figura 1

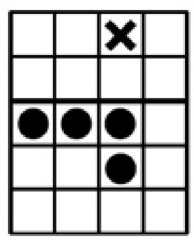


Figura 2

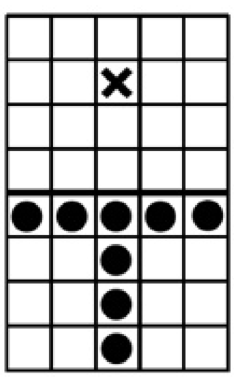


Figura 3

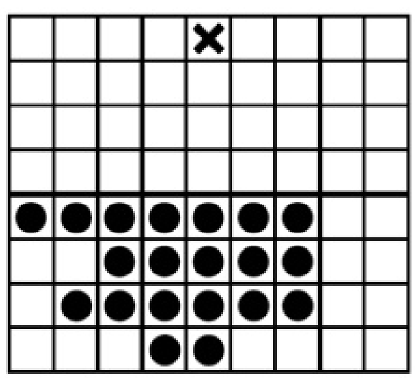


Figura 4

¿Cuál es el objetivo? Avanzar hacia arriba (con movimientos "legales") de manera tal de poder ubicar un soldado lo más arriba posible. Es decir, tratar de ocupar algún casillero del otro lado de la línea divisoria, y que ese casillero esté lo más arriba posible.

Empiezo con algunas preguntas: ¿se le ocurre alguna forma de llegar a la primera fila de arriba? (La/lo dejo para que lo piense y luego sigo yo.)

Como se ve en la figura 1, la solución es muy sencilla. Basta con disponer los soldados como se ve allí, y entonces uno alcanza la primera fila inmediatamente. Y lo más importante es que lo pudo hacer usando solamente dos soldados y *un* solo movimiento.

Ahora, Conway dobla la apuesta. ¿Hay alguna forma de distribuir sus piezas del lado de abajo de manera tal de llegar (usando los movimientos permitidos) a la segunda fila de arriba?

La respuesta es: *sí,* se puede. Descubra usted entonces cuántos soldados (piezas) le hicieron falta y cuántos movimientos usó. Vea la figura 2.

Observe que ahora son necesarias 4 piezas y 3 pasos con esa distribución. Vale la pena que se detenga un rato y piense por qué no se puede hacer en un número menor de pasos.

Es que *seguro* se necesita más de un paso: con uno solo no se puede llegar a la segunda fila, porque hace falta que haya un soldado en la primera, y como al principio del juego no hay nada del lado de arriba, inexorablemente hemos necesitado un paso antes para poner esa ficha allí. Luego, un paso *no es suficiente.*

Después, debajo de la pieza que quedó arriba en la primera fila no puede haber quedado ninguna otra porque uno usó ese casillero para llevar esa pieza hacia arriba. Luego, hace falta un movimiento más para poner otra pieza en ese lugar (para que pueda "comer" a la que está arriba y de esa forma depositar la que queremos en la segunda fila).

En resumen, uno lo puede hacer pero necesita 4 piezas y 3 pasos.

¿Y si uno quiere llegar a la tercera fila? ¿O a la cuarta, o la quinta? ¿Y más arriba? ¿Cuántos soldados hacen falta? ¿Y cuántos pasos?

Lo interesante es lo siguiente: para poder llegar a la tercera fila hacen falta 8 piezas distribuidas (como se ve en la figura 3). Y para llegar a la cuarta fila son necesarias 20 piezas, y una de las distribuciones que se pueden usar es la que se ve en la figura 4.[26]

Pero ahora uno tropieza con una dificultad. Intente llegar hasta la quinta fila y fíjese cuánta suerte tiene. Créame: trate de llegar hasta allí arriba y verá lo que pasa.

Muchos procuraron encontrar alguna forma de llegar a la quinta fila de arriba... pero, como le pasó a usted, no pudieron. No importaba la forma que eligieran, ni la distribución de las piezas, no lo podían lograr (por eso le propuse que lo intentara por su cuenta, para comprender el grado de dificultad que implica).

Hasta que John Conway probó que, no importa con cuántas piezas empiece ni cuántos pasos dé, *¡no hay manera de llegar a la quinta fila!*

La demostración[27] escapa a lo que yo puedo hacer acá, pero créame que lo que hace Conway es usar un poco de matemática (no muy avanzada) y mucha creatividad. Y eso es lo que (creo) deberíamos aprender a valorar más: la creatividad, y no tanto el conocimiento enciclopédico. Importa más estimularnos a pensar distinto, por fuera de lo convencional. Por lo tanto, más allá de encontrar la solución, lo notable es poder demostrar que, independientemente de lo que uno haga, no va a poder llegar hasta arriba.

Eso es lo que impacta y transforma este *juego* en algo tan valioso: la posibilidad de pensar cómo avanzar sin saber si es posible o no llegar a destino. Uno puede presumir que es *uno* el que no encuentra la fórmula para lograrlo, y que otro podría llegar si hiciera algo diferente de lo que se nos ocurrió a nosotros. Por eso, lo extraordinario es que haya alguien (Conway) que demostró que, cualquiera sea la estrategia, *nadie* va a poder resolverlo.

---

[26] Si observa lo que sucedía en los primeros pasos, cuando uno quería llegar a la fila uno, con 2 piezas alcanzaba. Para llegar a la fila dos, necesitaba 4 piezas. Para ocupar la fila tres, se necesitaban 8. Uno "podría" conjeturar, mirando estos números,

Fila	Piezas
1	2
2	4
3	8

que la fórmula "debería" ser: para llegar a la fila n hacen falta 2^n piezas. Sin embargo, esta fórmula es falsa.

[27] La demostración de esto se puede encontrar (en inglés) en: http://plus.maths.org/issue12/xfile/.

De eso se trata. De disfrutar de pensar aun sabiendo que el problema que uno encara tal vez no tenga solución. El hecho de poder demostrar que no existe una solución representa un avance increíble en la mayoría de las situaciones de la vida que uno enfrenta. Y por eso la matemática tiene semejante potencia.

Problema 33
Cuadrados de Bachet

Tome un mazo de cartas. Puede ser un mazo de cartas españolas (con las que se juega a la Escoba de quince o al Truco) o de cartas francesas (con las que se juega al Póquer o al Gin Rummy). En todo caso, cualquiera de ellos sirve.

Para fijar las ideas, voy a suponer que elegí las francesas, porque son las que se usan en los casinos de todo el mundo, aunque a los efectos de lo que quiero hacer es totalmente irrelevante. Como usted sabe (y puede ver en la figura 1), hay cuatro *palos* diferentes: corazón, pica, trébol y diamante.

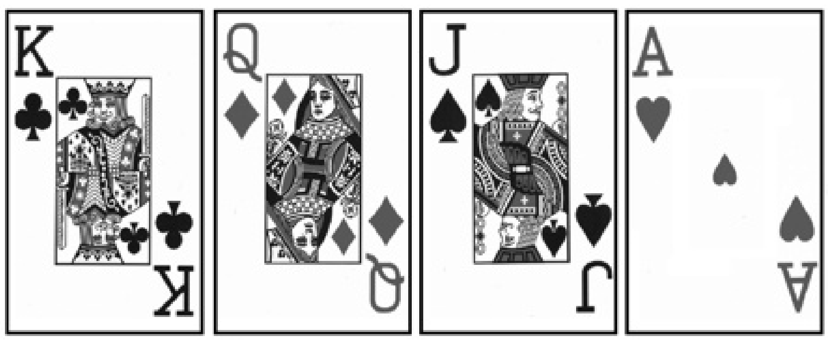


Figura 1

Seleccionemos entonces estas 16 cartas:

a) Los cuatro reyes (las cuatro letras K).
b) Las cuatro reinas (las cuatro letras Q).
c) Los cuatro caballeros (las cuatro letras J).
d) Los cuatro ases.

El objetivo es formar cuatro filas y cuatro columnas con las 16 cartas.

Pregunta 1: ¿Cuántas maneras hay de fabricar un cuadrado como ése? Es decir, ¿cuántas formas hay de ubicar las cartas en una grilla de 4 por 4 (4 filas por 4 columnas)?

Pregunta 2: De todas las formas que encontró al contestar la pregunta 1, o sea, de *todas* las configuraciones posibles, ¿cuántas hay que cumplan simultáneamente con las siguientes restricciones?

1. Que cada letra aparezca sólo una vez en cada fila y en cada columna.
2. Que cada "palo" aparezca sólo una vez en cada fila y en cada columna.
3. Que cada palo y cada letra aparezcan una sola vez en cada una de las dos diagonales.

Un ejemplo de esta disposición es la que se ve en la figura 2. Este tipo de cuadrados se llaman "Cuadrados de Bachet".[28]

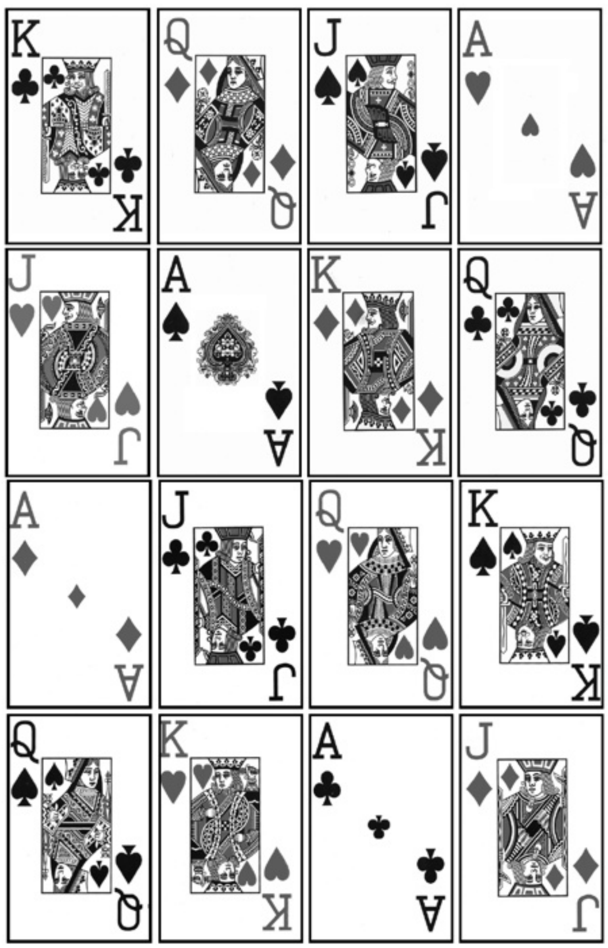


Figura 2

Ahora le toca a usted.

[28] Se los llama así en homenaje al matemático francés Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638), quien fue el primero (del que se tenga registro) que planteó este tipo de problemas con cuadrados "mágicos".

Solución.

Como se trata de ubicar cartas en 16 casilleros, que están distribuidos en 4 columnas y 4 filas, el aspecto (vacío) que tiene el cuadro es el siguiente:

Tabla 1

Ahora, a cada casillero le voy a poner un número de manera tal de poder identificarlo cuando quiera referirme a él. El cuadro queda entonces de la siguiente manera:

11	**12**	**13**	**14**
21	**22**	**23**	**24**
31	**32**	**33**	**34**
41	**42**	**43**	**44**

Tabla 2

De esta forma, el primer número de los dos indica la fila, y el segundo, la columna.

Antes de contestar las preguntas, quiero pensar con usted un caso más sencillo, para después sí abordar juntos el caso general. Cuando uno tiene que responder preguntas de este tipo siempre es útil plantearse qué pasaría si en lugar de haber 16 cartas (como en el caso que nos ocupa) hubiera menos. Por ejemplo, si hubiera solamente 2 cartas, J y Q, ¿de cuántas formas se las podría ordenar? Respuesta: JQ, o bien, QJ.

Es decir, primero va la J (y por lo tanto después va la Q), o bien primero va la Q (y después la J).

Moraleja: Hay dos formas de ordenarlas si son sólo 2 cartas.

Ahora quiero invitarla/o a que decidamos cuántas formas habría de ordenar 3 cartas (digamos J, Q y K), pero, si fuera posible, me gustaría que llegáramos al resultado *sin necesidad de escribirlas todas.*

En ese caso, hay tres lugares para llenar (donde cada "lugar" será ocupado por una carta). Acompáñeme en el siguiente razonamiento (que nos servirá para todo lo que sigue): cualquiera de las tres letras puede ocupar el primer lugar, la J, la Q o la K. O sea, en principio, hay tres posibles alternativas para el primer lugar.

Pregunta: Una vez que está ubicada la letra que va en el primer casillero, ¿cuántas posibles letras pueden ocupar el segundo casillero? Piénselo usted sola/o primero.

Sigo: si el primer casillero ya está ocupado por una letra, entonces ¡esa letra no puede aparecer en el segundo casillero también! Luego, en el segundo lugar puede aparecer cualquiera de las dos letras que no están usadas en el primero. Por ejemplo, si en el primero está la J, entonces en el segundo puede ir la K o la Q (pero no la J otra vez). Si en el primero estuviera la K, entonces en el segundo podrían ir o bien la J o bien la Q. Y por último, si en el primero estuviera la Q, entonces en el segundo podrían ir o bien la K o bien la J.

En resumen, para cada elección de la primera letra, hay *dos* posibilidades para la segunda. Luego, como para el primer casillero hay *tres* posibilidades, en total hay *seis* maneras de ubicar letras en los dos primeros casilleros. Y esto lo obtuvimos multiplicando 3 x 2 (3 en el primer casillero, 2 en el segundo).

Es fácil terminar de ubicar la letra en el último casillero, porque como ya ubiqué las dos primeras, no hay más que usar en el tercero la letra que sobró.

MORALEJA FINAL: Con 3 letras se tienen (3 x 2 =) 6 formas de ordenarlas.

¿Y si hubiera 4 letras? Entonces, ¿aceptaría si le dijera que habrá

4 x 3 x 2 = 24

formas de distribuir las 4 letras en los 4 casilleros?

Es que, como hicimos recién cuando había 3 letras, para el primer casillero hay 4 alternativas. Para cada elección de letra en primer lugar, quedan 3 letras que todavía no usamos. Es decir, e total, para los dos primeros casilleros hay

4 x 3 = 12 (*)

formas posibles. Por último, para el tercer lugar hay dos posibles letras (en total hay 4, pero ya usamos 2 para los dos primeros lugares, por lo que quedan solamente 2 letras para usar). Luego, par cada una de las 12 alternativas que figuran en (*) hay dos posibles maneras de continuar en el tercer casillero. Luego, en total hay:

4 x 3 x 2 = 24 (**)

Y ya no hay nada más para hacer, porque queda una sola letra si usar, y tendré que ponerla en el último casillero. De la misma forma, si hay 10 letras habrá

10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 3 628 800

formas de distribuirlas.
Ya hemos visto (en este y otros libros) que el procedimiento d multiplicar todos los números hacia atrás -como hice en los ejemplos que figuran más arriba (3 x 2, 4 x 3 x 2, o bien 10 x 9 x 8 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2)- se llama factorial de un número y se anota poniendo un signo de admiración al lado. Así, el factorial de 10 se escribe:

10! = 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 = 3 628 800

Es interesante notar, entonces, que el factorial de un número *n,* (que se escribe *n!)* sirve para medir o contar de cuántas formas se pueden distribuir *n* objetos en *n* casilleros.

Pregunta 1

Ahora, con estos elementos, estamos en condiciones de contestar la primera pregunta que dejé planteada. Es decir, ¿cuántas formas posibles hay de ordenar las 16 cartas en una grilla de 4 por 4, pero sin restricciones? En este caso, como cada lugar de la grilla está ordenado, imaginemos que en vez de estar distribuidos en 4 filas por 4 columnas fueran 16 casilleros consecutivos.

Es decir, en lugar de estar distribuidos así:

A11	**A12**	**A13**	**A14**
A21	**A22**	**A23**	**A24**
A31	**A32**	**A33**	**A34**
A41	**A42**	**A43**	**A44**

Tabla 3

(donde el primer numerito que figura al lado de la letra A indica la fila y el segundo, la columna), uno podría pensarlos distribuidos así:

A11	**A12**	**A13**	**A14**	**A21**	**A22**	**A23**	**A24**	**A31**	**A32**	**A33**	**A34**	**A41**	**A42**	**A43**	**A44**

Luego, todo lo que hay que hacer es usar lo que escribí más arriba sobre el factorial de un número. En este caso, como hay 16 cartas y 16 casilleros, es como si la pregunta dijera: ¿de cuántas formas se pueden distribuir las 16 cartas en las 16 casillas que acabamos de construir?

(¿Quiere pensar sola/o la respuesta antes de seguir leyendo?)

Tiene razón (si es que pensó lo que sigue). La respuesta es el factorial de 16, o sea,

$$\mathbf{16! = 20\ 922\ 789\ 888\ 000}$$

¿Se da cuenta de lo que esto significa? Lo que dice este número es que si uno tiene 16 cartas (o cualquier tipo de objetos distintos) y quiere pensar de cuántas formas es posible distribuirlas en 16 casillas, el resultado ¡supera las 20 billones de posibilidades!

Pregunta 2

Ahora la pregunta varía: ya no hay libertad para distribuir las cartas, sino restricciones. En realidad, muchas restricciones: en cada fila no puede repetirse la letra, lo mismo que en cada columna y, además, no puede repetirse el palo ni en las filas ni en las columnas; por último, tampoco puede repetirse ni la letra ni el palo en ninguna de las dos diagonales.

Como le decía, hay muchísimas restricciones. Quiero que pensemos juntos cuánta incidencia tienen para que disminuya la cantidad de variantes posibles. Para eso, la/lo invito a que hagamos juntos un análisis precioso. Verá por qué.

Por un momento quiero olvidarme del palo de cada carta y sólo me voy a fijar en la letra. Hay cuatro letras: A, J, Q y K.

Voy a tratar de "construir" un cuadrado de Bachet. Es decir, un cuadrado que sirva, que cumpla con las condiciones. Para eso, voy a elegir las cartas de la primera fila.[29]

Supongamos que empiezo así:

AJQK

Vamos a ver cuántos cuadrados empiezan así. Le pregunto: ¿de cuántas formas puede empezar la segunda fila?

Contesto: de tres formas. Puede que empiece con una J abajo, con una Q o con una K. No puede haber una A porque, si no, habría dos A en la primera columna. Es decir, si el cuadrado empieza con AJQK, tiene que seguir con una de estas tres posibilidades:

[29] Fíjese que si hay algún cuadrado de Bachet, es decir, algún cuadrado que sirva, entonces tiene que haber un cuadrado que empiece con cualquier fila que cumpla con las condiciones. ¿Por qué? Porque, si cambio las letras del cuadrado que sirve y pongo la fila que quiero y soy consistente con los cambios que hago (es decir, si cambio todas las letras A por J, y las J por A, por ejemplo), no debería haber ninguna alteración.

Caso 1 **AJQK**
J

o bien,

Caso 2 **AJQK**
Q

o bien,

Caso 3 **AJQK**
K

Empecemos con el caso 1. Si uno tiene

AJQK
J

fíjese que debajo de la letra J de la primera fila tiene que haber forzosamente una K. ¿Por qué? Una A no puede ir, porque habría dos A en la diagonal izquierda (que va de izquierda a derecha). Una letra J no puede ir porque ya hay una J en esa fila (y columna). Quedan dos posibilidades: una Q o una K. Pero si uso la Q en el lugar A22 (vea la tabla 3), entonces, obligatoriamente tengo que usar una K en A23 o en A24, y eso es imposible, porque o bien habría dos K en la diagonal derecha (que va de derecha a izquierda) o bien habría dos K en la cuarta columna. Luego, forzosamente tiene que haber una K debajo de la J en el lugar A22.

AJQK
JK

Ahora bien: quedan dos letras, la Q y la A. No podemos poner la Q en el lugar A23 porque hay una Q en la misma columna. Luego, obligatoriamente tengo que usar la A debajo de la Q, y la Q en el lugar restante. La situación entonces queda así:

AJQK
JKAQ

¿Y ahora? Como ve, estoy construyendo las filas una tras otra. Sigamos con la tercera. Fíjese que en la segunda columna ya usé la J y la K. Quedan solamente la A y la Q. Pero no puedo usar la A en el lugar A32 porque (en la diagonal de derecha a izquierda) ya hay una A. Luego, inexorablemente, la letra que va en A32 es una Q. En definitiva, se tiene una configuración así:

AJQK
JKAQ
Q

Necesito poner una letra K en la tercera fila, pero ¿dónde? No va en la posición A33 porque ya hay una K en la diagonal de izquierda a derecha. No puede ir en la posición A34 porque ya hay una K en la cuarta columna. Por lo tanto, la K está forzada a ir en la primera posición, o sea, en A31, y así tenemos:

AJQK
JKAQ
KQ

Ahora me faltan distribuir la A y la J en la tercera fila. La A no puede ir en la tercera columna porque ya hay una A en la posición A23. Luego, forzosamente debe ir en la ubicación A34 y la J, en A33:

AJQK
JKAQ
KQJA

Pero esta situación no puede ser. ¿Por qué? Porque la última columna obliga a poner una J en el lugar A44, pero como ya hay una en A33, entonces, habría dos J en la diagonal.

¿Qué enseña esto? Enseña que, según la configuración inicial que tenía la primera fila con la distribución AJQK, si quiero empezar la segunda columna con una J, ese camino no funciona.

MORALEJA : La segunda fila tiene que empezar o bien con una Q o bien con una K.

Acá quiero hacer una pausa. No voy a seguir escribiendo todas las posibles alternativas porque son del mismo estilo de lo que acabo de razonar (espero que con usted como socia/o), pero lo que sí voy a hacer es escribir las dos configuraciones que se pueden obtener con la primera fila AJQK:

AJQK	**AJQK**	
QKAJ	**KQJA**	
KQJA	**JAKQ**	**(* * ***
JAKQ	**QKAJ**	

¡Y no hay más! Por supuesto, no hace falta que me crea. De hecho, la idea es que usted haga sus propios razonamientos y deduzca que lo que escribí aquí está bien... Si es que está bien.

Hecho esto, ¿qué conclusiones podemos sacar? Veamos: ¿qué pasaría si intercambiáramos dos letras? Es decir, si en (***), en todos los lugares donde dice A ponemos J, y donde dice J ponemos A (por elegir un ejemplo). ¿Qué pasaría?

RESPUESTA : Si intercambiáramos dos letras, el nuevo cuadrado que obtendríamos sería también un cuadrado de Bachet.
Por ejemplo, si en los dos casos que aparecen en (***) permutamos las A con las J, el resultado es:

JAQK	**JAQK**	
QKJA	**KQAJ**	
KQAJ	**AJKQ**	**(****)**
AJKQ	**QKJA**	

Como se ve, haber producido ese cambio no afecta las restricciones, se siguen cumpliendo todas. Luego, si en lugar de haber empezado con la fila 1

AJQK,

uno empieza con la fila

QJKA,

comparando las dos, se deduce que en todos los lugares donde aparece una A en (***), hay que reemplazarla por una Q, las J no cambian, la Q se transforma en K y la K es ahora una A.
Si uno produce todos esos cambios, el nuevo cuadrado que se obtiene sigue cumpliendo las mismas restricciones que el original. Por lo tanto, haber encontrado los dos cuadrados que figuran en (***) enseña que si se cambia la primera fila y se dispone otra distribución de letras (que cumpla con las reglas), cuidando de intercambiar las letras en los lugares correspondientes, se obtienen siempre cuadrados "lícitos".
Entonces, para saber cuántos posibles cuadrados de Bachet se pueden construir (por ahora sin importar el "palo"), basta poder contestar cuántas posibles formas hay de ordenar las cuatro letras en la primera fila. O sea, ¿cuántas formas distintas hay de ordenar

las letras A, J, Q y K? La respuesta a esta pregunta se puede encontrar más arriba, en (**).

Es decir:

hay 4! = 24 formas

de distribuir las cuatro letras. Pero ahí no termina la respuesta. Porque por cada forma de ubicar las letras en la primera fila hay dos configuraciones posibles, como se ve en (***).

O sea, hay en total

24 x 2 = 48

posibles cuadrados de Bachet. Pero, un momento, todavía no consideramos los diferentes "palos". Fíjese en (***), que reproduzco acá otra vez:

AJQK	**AJQK**
QKAJ	**KQJA**
KQJA	**JAKQ**
JAKQ	**QKAJ**

Aquí figuran dos cuadrados lícitos. Pero no figuran los palos. Le pregunto: ¿importaría que en la primera fila la A fuera de trébol o de pica?

Respuesta (después de darle tiempo para que lo piense usted):

No, no importaría.

Pero no bien decidimos que -por ejemplo- la primera A del primer cuadrado es de trébol, entonces eso obliga a que ni la J, ni la Q ni la K sean de trébol. Y lo mismo con las filas que siguen. O sea, para poder conservar la "legalidad" de los cuadrados que figuran en (***) hace falta que la distribución de los palos sobre cada una de las letras sea *también* un cuadrado de Bachet.

Es decir, por cada cuadrado de Bachet de letras puedo distribuir los 4! = 24 distribuciones posibles (lícitas) de los "palos". Y esto se puede hacer con cada uno de los cuadrados de Bachet usando sólo las letras.
Resultado final: hay

$$(4!)^2 \times 2 = 24^2 \times 2 = 1152 \text{ cuadrados posibles.}$$

Moraleja final: De las 16! = 20 922 789 888 000 distribuciones posibles que se pueden hacer con las 16 cartas sólo ¡1152! son cuadrados de Bachet. Y si uno divide

$$16!/1152 = 18\ 162\ 144\ 000$$

de todos los cuadrados posibles que se pueden formar con las cuatro cartas, hay sólo uno de Bachet cada 18 000 millones

Espero que esté de acuerdo conmigo: son pocos.

Problema 34
Camaleones

El siguiente problema es verdaderamente espectacular. Si bien es muy conocido,[30] cada vez que tropiezo con él me atrapa y me obliga a quedarme un buen rato tratando de pensar nuevamente la solución. Y aunque sé que ya lo pensé antes, en lugar de tratar de recordar la respuesta anterior, prefiero enfrentarlo como si fuera uno nuevo y disfrutar del proceso de resolverlo.

Hay muchas versiones posibles y, obviamente, voy a elegir una sola, pero si usted conoce otra, mejor aún: le servirá para comparar. Acá va la que más me gusta a mí:

En una isla hay 45 camaleones de 3 variedades distintas. 17 son de color borravino (B), 15 son rojos (R) y 13 son púrpura (P). Cada vez que dos camaleones de distinto color se encuentran, cambian al tercer color. Por ejemplo, si uno B se encuentra con uno R, entonces ambos se convierten en P.

La pregunta es: ¿hay alguna forma de hacer que se encuentren de manera tal que en sucesivos pasos todos terminen siendo del mismo color?

Es un problema precioso que, como usted advierte, sólo requiere ponerse a pensar en una estrategia que sirva para resolverlo. ¿Se podrá? ¿Habrá alguna forma de hacer que todos se vuelvan del mismo color?

Una sola observación: si usted cree que se puede, escriba los pasos que necesita dar para resolverlo. Si, en cambio, cree que no se puede, entonces explique por qué. Es decir, no alcanza con que diga que no pudo hallar la solución para afirmar que ésta no existe. De hecho, en ese caso la solución consistiría en demostrar que el problema no tiene solución.

Ahora sí, queda usted con... usted mismo.

---

[30] Este problema se puede encontrar en diferentes lugares en la red, por eso incluyo acá sólo algunos: <http://home.att.net/~numericana/ answer/recreational.htm#raise>
<http://www.joaoff.com/wp-content/ uploads/2009/07/chameleons.pdf>.
Si bien el problema y los comentarios están en inglés, estoy seguro de que también debe haber sido publicado en español. Además, se puede encontrar en: 1) Ross Honsberger, *In Polya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays* (Dolciani Mathematical Expositions), The Mathematical Association of America, octubre de 1997; 2) Peter Winkler, *Puzzled: Understanding Relationships Among Numbers,* Commun. ACM, 52(5): 112, 2009, y 3) Paul Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving,* John Wiley & Sons, 2ª ed., septiembre de 2006.

Soluciones.

Yo sé (porque me pasó muchas veces) que uno tiene la tentación de leer la solución sin haberle dedicado mucho tiempo a intentar resolverlo. Créame que no vale la pena que lea lo que sigue, a menos que ya haya disfrutado del problema. No se robe a usted misma/o la oportunidad de entretenerse con él. ¿Qué ganaría con saber la respuesta? ¿Qué gracia tendría? Discuta con usted misma/o, siéntese con paciencia, una lapicera, papel y disfrute de la búsqueda.

Le propongo pensar algo antes de avanzar. Si se pudiera encontrar una manera de que todos los camaleones terminaran siendo del mismo color, eso significaría que, antes de dar el último paso, tuvo que haber ocurrido algo. (¿Qué le parece que tuvo que suceder?)

Supongamos que todos terminaron siendo P. Entonces, lo que debió haber pasado es que, luego del penúltimo paso, la cantidad de camaleones B y R tuvo que ser la misma. De esa forma, al encontrarse entre ellos, se convierten todos en P y no queda ninguno más ni de color B ni de color R.

Esto quiere decir que, para que el problema tenga solución, tenemos que poder llegar a una situación previa, en el último paso, donde las cantidades de dos de los colores tienen que coincidir *inexorablemente.* Luego, si hay la misma cantidad de dos colores, la diferencia de ambos números tiene que ser *cero.*

Acompáñeme con esta idea. Se tienen:

B = 17 R = 15 P = 13

Como vimos recién, uno quiere *encontrar* algún procedimiento que permita obtener la misma cantidad de dos de los colores. Fíjese en las diferencias entre los posibles pares:

B - R = 17 - 15 = 2
B - P = 17 - 13 = 4 (*)
R - P = 15 - 13 = 2

Veamos lo que pasa si se encuentran uno B con uno R. En ese caso, el número de B y de R *disminuye en 1,* en tanto que el número de P aumenta en 2. Es que los camaleones de colores B y R cambian de color y se transforman en P. Luego, ahora habrá:

B = 17 - 1 = 16 R = 15 - 1 = 14 P = 13 + 2 = 15

Y ahora, calculemos las diferencias:

B - R = 16 - 14 = 2
B - P = 16 - 15 = 1 (**)
R - P = 14 - 15 = -1

Es importante notar, entonces, que la diferencia entre B y R permaneció constante (en 2), ya que cada uno de esos colores disminuyó en 1 su cantidad, en tanto que la diferencia entre B y P se redujo en 3 (de 4 pasó a 1) y la diferencia entre R y P se redujo también en 3 (de +2 pasó a -1).
¿Es razonable esperar que esto pase? Sí, lo es, si uno piensa que cada uno de los colores que se encuentran disminuye en 1, pero el tercer color *aumenta en 2.* Por lo tanto, la diferencia o bien aumenta en 3 o bien disminuye en 3 (es decir, +3 o -3).
¿Qué enseña esto? Que cuando uno *aparea* dos colores distintos se produce una modificación en las diferencias hacia arriba en 3, o hacia abajo en 3. Y la otra permanece constante. Luego, si lo que uno quiere es llevar alguna de las diferencias hasta *0,* podrá hacerlo en la medida en que, sumando de a 3 o restando de a 3, pueda llegar a 0. Es decir, si alguna de esas diferencias es *¡un múltiplo de 3!* Si no, nunca va a llegar a 0, y por lo tanto, nunca podrá llegar a tener todos los camaleones del mismo color.
Como las diferencias originales en (*) son 2, 4 y 2 respectivamente, por más que uno haga los apareamientos que quiera, *nunca va a llegar al objetivo.*

Más en general

La pregunta que uno podría hacer ahora es: ¿nunca se puede? Es decir, ¿no hay alguna forma de distribuir los colores al principio de manera tal de poder llegar a tener todos los camaleones del mismo color?

La respuesta que surge inmediatamente es: sí, tiene que haber alguna forma. Por ejemplo, si uno empezara con todos los camaleones del mismo color (situación posible, aunque a usted le parezca tonta), la respuesta sería: sí, se puede.

Otra forma sería empezar con la misma cantidad de camaleones de dos colores distintos (por ejemplo, 22 B, 22 R y 1 P). En ese caso, apareando los 22 R con los 22 B obtenemos 44 de color P que, sumados al que ya existe, nos permiten llegar a los 45 del mismo color.

O sea, evidentemente hay ciertos casos en los que se puede. Ahora bien, ¿cómo hacer para determinarlos todos? Más aún, ¿qué hacer para saber de antemano si se podrá o no?

Le propongo entonces que miremos el caso general. Es decir, ahora voy a utilizar algunas letras para no tener que usar números, pero usted, si quiere, piense en los ejemplos que vimos más arriba, donde teníamos 45 camaleones en total: B = 17, R = 15 y P = 13. Ahora voy a considerar:

Camaleones de color B = b

Camaleones de color R = r

Camaleones de color P = p

Las diferencias entre cada uno de estos números son:

B - R = b - r B - P = b - p R - P = r - p

Se pueden aparear entonces de tres maneras distintas: B con R, B con P y R con P. Y en cada caso se producen tres consecuencias diferentes.

Caso 1

Si se encuentran B y R, entonces el número de B y de R disminuye en 1 y el de P aumenta en 2. O sea:

B = (b - 1)
R = (r - 1)
P = (p + 2)

¿Cómo cambian las diferencias en este caso?

B - R = (b - 1) - (r - 1) = (b - r) (permanece constante)
B - P = (b - 1) - (p + 2) = (b - p) - 3 (disminuye en 3)
R - P = (r - 1) - (p + 2) = (r - p) - 3 (disminuye en 3)

Caso 2

Si se encuentran B y P, entonces el número de ambos disminuye en 1 y el de R aumenta en 2. O sea:

B = (b - 1)
R = (r + 2)
P = (p - 1)

Las diferencias se modifican de la siguiente forma:

B - R = (b - 1) - (r + 2) = (b - r) - 3 (disminuye en 3)
B - P = (b - 1) - (p - 1) = (b - p) (permanece constante)
R - P = (r + 2) - (p - 1) = (r - p) + 3 (aumenta en 3)

Caso 3

Si se encuentran R y P, entonces el número de R y de P disminuye en 1 y el de B aumenta en 2. O sea:

B = (b + 2)
R = (r - 1)
P = (p - 1)

Las diferencias se modifican de la siguiente forma:

B y R = (b + 2) - (r - 1) = (b - r) + 3 (aumenta en 3)
B y P = (b + 2) - (p - 1) = (b - p) + 3 (aumenta en 3)
R y P = (r - 1) - (p - 1) = (r - p) (permanece constante)

¿Qué podemos hacer ahora con toda esta información? El objetivo, como quedó fijado al principio, es lograr que alguna de las diferencias entre el número de camaleones sea *cero.* De acuerdo con lo que calculamos más arriba, uno puede aumentar o disminuir esas diferencias en 3. Veamos cómo usar estos datos.
Voy a incluir un ejemplo (final) y espero que usted y yo nos pongamos de acuerdo en lo que hay que contestar en cada caso. Supongamos que nos dan 89 camaleones, de los cuales hay

B = 42
R = 18 (***)
P = 29

Ya sabemos que uno tiene que calcular las tres *diferencias* entre los distintos pares de colores.

B - R = (42 - 18) = 24
B - P = (42 - 29) = 13
R - P = (18 - 29) = -11

De los tres números que aparecen (24, 13 y -11), el único que es múltiplo de 3 es el 24. Y no hace falta más que eso, entonces. ¿Por qué? Porque si se fija en lo que hicimos más arriba en cada uno de los tres casos posibles de apareamientos, el caso 2, que aparea B con P, obliga a que en cada apareamiento se reduzca en 3 la diferencia entre B y R. Luego, si apareamos 8 B con 8 P vamos a lograr reducir en 24 la diferencia entre B y R.

Hagámoslo. Fíjese en (***). Si apareamos 8 B con 8 P reduciremos en 8 el número de B y en 8 el número de P, y vamos a aumentar en 16 el número de R. Luego, tendremos:

B = 42 - 8 = 34

R = 18 + 16 = 34

P = 29 - 8 = 21

Una vez que llegamos hasta acá, el problema está resuelto porque, como hemos logrado que haya 34 camaleones de color B y otros tantos de color R, en el próximo paso apareamos unos con otros y los transformamos a todos en P, que es lo que queríamos.

Moraleja 1: Este problema parece (y es) muy ingenuo. Da la impresión de que uno está jugando y, de hecho, en algún sentido, *estamos jugando.* Pero en el medio hubo que apelar a distintas herramientas de la matemática para poder descubrir en qué casos el problema original tenía solución y en cuáles no. Y quedó todo reducido a un problema de álgebra.

Moraleja 2: El problema general tiene solución siempre y cuando alguna de las diferencias entre los camaleones de distinto color sea múltiplo de 3. Si no, no es posible encontrar ningún apareamiento que haga que se vuelvan todos del mismo color.

Las Historias

Historia 1
El último teorema de Fermat

No permita que la palabra "teorema" lo intimide. Déjeme contarle una historia fascinante. En realidad, es una historia que podría terminar convertida en una película de Hollywood y, por supuesto, en varios libros (algunos ya se han escrito). Es que contiene todos los ingredientes necesarios para el éxito: drama, intriga, pasión e incertidumbre, pero, además, lo que la hace todavía más atractiva es que involucra al mundo de la ciencia... y entonces todo puede volverse desde más creíble hasta más intimidatorio y controversial. En todo caso, es la historia más famosa del mundo de la matemática. Hay gente que dedicó su vida a probar que algo era cierto. y otros tantos que la dedicaron a probar lo contrario. Lo que sigue, entonces, son los detalles.

Pierre de Fermat vivió entre 1601 (o 1607, o 1608. la fecha de su nacimiento es dudosa) y 1665. Nació cerca de Toulouse, Francia, y se recibió de abogado en la Universidad de Orleans. Hablaba varios idiomas: latín, griego, italiano, español y, obviamente, francés.[31] Sin embargo, si bien su palabra y su opinión eran muy buscadas dentro del ámbito del derecho, hizo su aporte más importante a la historia de la humanidad como matemático.

Curiosamente, Fermat no se consideraba a sí mismo como tal. De hecho, hacía sus afirmaciones a través de cartas a sus amigos (Pascal, entre otros) y, en general, tendía a no ofrecer las clásicas demostraciones que los matemáticos consideran (consideramos) imprescindibles para que algún aporte sea juzgado válido. Eso le garantizaba, en algún sentido, la vigencia de su condición de *amateur.* Fermat no se sentía obligado a hacer lo que tenían que hacer todos los demás: *probar lo que decía.* Algunas veces lo hacía. Otras (muchas), no.

Esto no pretende quitarle ningún mérito, ya que con el tiempo Fermat se convertiría en el padre de lo que hoy se denomina la *teoría de números,* que es la que estudia -

[31] Carlos D'Andrea apunta que quizá no hablara el "francés" tal como lo conocemos hoy, ya que éste recién fue adoptado después de la revolución de 1789. En todo caso, quizás hablaba en "provenzal" u "occitano".

entre otras cosas- las propiedades de los números enteros. De hecho, él se habrá considerado un *amateur,* pero sus ideas revolucionaron una parte de la ciencia. Sus cartas con Pascal fueron el origen de la teoría de probabilidades. Y virtualmente transformó *todo* lo que tocó en matemática.

Pero lo que Fermat nunca soñó (creo) fue que terminaría haciendo -involuntariamente- un aporte inigualable. En 1650 escribió una nota en el margen de un libro que estaba leyendo *(Arith- metica,* de Diofantino) en la que afirmaba que la ecuación

$$a^n + b^n = c^n \qquad (1)$$

no tenía solución (para números enteros *a*, *b* y *c* mayores que 0) para *n* mayores que 2. Y agregaba que ese margen era demasiado pequeño para escribir la demostración.

Lo curioso es que Fermat se murió y nunca llegó a publicar la justificación de lo que decía. Su hijo, muchos años después, hizo pública una copia de lo que su padre había escrito en el margen del libro (el original nunca apareció) y eso iniciaría la verdadera historia. Poco antes de morir, Fermat dejó planteadas varias incógnitas que con el tiempo se fueron comprobando. Con una excepción... una *sola* excepción: lo que se empezó a conocer con el nombre de "La *conjetura* de Fermat".[32]

Los matemáticos más importantes de la historia (Euler, Dirichlet, Gauss, Lamé, Kummer, Sophie Germain..., entre otros) intentaron probarla pero no pudieron. Se resolvían casos particulares, sí, pero no se encontraba la solución general. Ya no eran sólo algunos años, sino que empezaron a pasar siglos y la pregunta seguía vigente: lo que había dicho Fermat ¿era cierto o falso?

Lo más frustrante era que el enunciado del problema resultaba tan sencillo que generaba fastidio no poder resolverlo. Hasta que apareció en escena Andrew Wiles (nacido en Cambridge, Inglaterra, en abril de 1953). Cuando tenía 10 años, un maestro de matemática de la escuela les contó a los alumnos sobre este problema

[32] Lo que fue la *conjetura* de Fermat hoy adquirió la categoría de *teorema,* luego de que Wiles confirmara que lo que Fermat había conjeturado era correcto.

que había enloquecido a los especialistas por más de trescientos años y que se conocía con el nombre de "La conjetura de Fermat".

Wiles, según su propia confesión, se propuso ser matemático y fantaseó con ser él quien lo resolviera. En 1975 empezó su carrera como investigador, pero fue en 1986 cuando -ya como profesor en Princeton- decidió dedicar entre doce y catorce horas diarias a desentrañar la solución del problema. Sin embargo, no quería comunicar a sus colegas lo que estaba haciendo, porque creía que todos lo entenderían como una pérdida de tiempo. Sólo su mujer, Nada Canaan, sabía lo que hacía en el altillo de su casa. Su rutina diaria lo llevaba a la facultad, donde tenía alumnos y dictaba su curso semestral, y mantenía una vida supuestamente normal.

Wiles comprendía que resolver el problema en sí mismo no serviría para nada útil, en el sentido mercantil de la palabra. Pero, como ocurre con todos los científicos, lo importante no necesariamente es encontrar la solución sino valorar y disfrutar de las herramientas que se desarrollan en el camino de la búsqueda. De eso se trataba (y se trata): de generar más matemática, que sirva (o no) para este caso particular, pero que, en el camino, permita que la ciencia avance en múltiples direcciones.

Después de seis años de virtual aislamiento, Wiles necesitó la ayuda de especialistas en otras áreas. Sus ideas eran tan novedosas que terminó ligando ramas de la matemática que no parecían tener relación hasta ese momento. Finalmente, en 1993, Wiles creyó que tenía *"la prueba".* Y se propuso contarla en un ciclo de tres conferencias que daría en Princeton.

La sala se encontraba abarrotada de gente, porque si bien no estaba anunciado el verdadero motivo de la charla, el rumor ya se había filtrado y la comunidad matemática esperaba un anuncio espectacular. Las tres conferencias ocuparon tres días y, para finalizar la última, Wiles escribió en el pizarrón la famosa "Conjetura de Fermat". Dejó la tiza apoyada en uno de los bordes y dijo: "Creo que voy a parar acá". El auditorio se puso de pie y aplaudió durante varios minutos. La noticia era/fue tan trascendente que apareció en la tapa de los diarios más importantes del mundo, empezando por el *New York Times.* Había caído la última pared. La "Conjetura..." dejaba de ser tal. Ahora se había convertido en un Teorema.

Pero no tan rápido. Para que una afirmación científica sea aceptada como verdad necesita la aprobación de los colegas, el monitoreo y el arbitraje independientes. Es decir, matemáticos expertos en el tema se disponen a leer exhaustivamente todo lo que está escrito para dar su consentimiento final. O sea: no alcanza con decir "ya lo terminé" o "ya lo probé" para que la prueba sea considerada válida.

Y ahí empezó otra pequeña odisea. Después de tanto entusiasmo y con el mundo expectante por la publicación, los *referís* no daban por concluida su tarea. Uno de ellos, Nick Katz, había encontrado *algo* que no entendía. Lo envió como pregunta al propio Wiles para que se lo aclarara, pero éste se dio cuenta rápidamente de que lo que Katz le estaba diciendo era que la prueba tenía un "agujero" (un error o bien algún razonamiento que no estaba bien justificado).

Era septiembre de 1993 y la mujer de Wiles le dijo: "Ahora, la única cosa que quiero como regalo de cumpleaños es que corrijas el 'error'. Quiero 'la prueba correcta'". El propio Wiles, cuando cuenta la historia, dice que su esposa cumple años el 6 de octubre. Sólo le quedaban entre dos y tres semanas. Pero no, no alcanzó. No hubo humo blanco.

Wiles comenzó a desesperar. Los árbitros no podían mantener más tiempo escondido el error. Al final, terminaron comunicándolo. Durante los siete años en los que Andrew había lidiado solo con el problema nunca había tenido que dar cuenta de sus avances ni de sus retrocesos. Desde las charlas en Princeton cada día era un calvario.

Un año después, con la ayuda de uno de sus estudiantes, Richard Taylor, Wiles se sintió tentado de anunciar que se daba por vencido. Pero la mañana del 19 de septiembre de 1994 tuvo una idea. Le corrió un sudor frío por el cuerpo porque advirtió lo que había pasado: *había encontrado la solución.* Ahora sí, los *referís* estuvieron de acuerdo y la prueba fue aceptada como tal. La reina de Inglaterra lo nombró "Sir Andrew Wiles" y su nombre pasó a engrosar la lista de los matemáticos más famosos e importantes de la Historia.

Es muy poco probable que lo que a Fermat no le hubiera entrado en el margen fuera la demostración correcta. En cualquier caso, es irrelevante. La moraleja será siempre que la solución en sí misma es *la zanahoria* que estimula, el motor del pensamiento... pero nunca es el objetivo último. En el trayecto se abren nuevos caminos y se desarrollan nuevas herramientas, que quizá resulten estériles en la búsqueda de *esa* solución en particular, pero que son los cimientos de la nueva ciencia.

El problema es realmente muy sencillo de entender (véase la ecuación (1)). El teorema de Pitágoras dice que "en un triángulo rectángulo (que tenga un ángulo recto, como en una escuadra.), el cuadrado de la hipotenusa (el lado más largo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

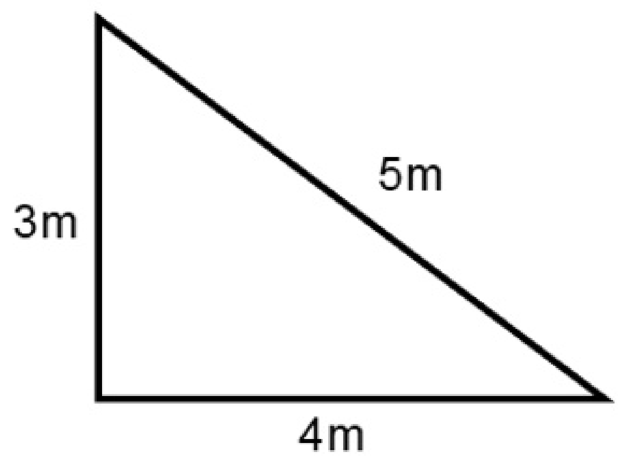


Figura 1

Por ejemplo, si (como se ve en la figura 1) los lados del triángulo rectángulo miden 3 y 4 metros respectivamente, entonces, como

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

y

$$25 = 5^2$$

la hipotenusa *tiene* que medir 5 metros. Luego:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

De estas ternas (3, 4, 5) se pueden encontrar infinitas. Lo que Fer- mat dijo es que si uno cambia el cuadrado por cualquier otro número, es decir, si uno toma la igualdad

$$x^n + y^n = z^n$$

y la quiere comprobar para algún otro número *n* que no sea *2* (como en el caso de Pitágoras), no lo va a encontrar: no existe. O sea, Fermat conjeturó: "No existen números enteros positivos n, salvo el 2, tal que sea válida la ecuación

$$x^n + y^n = z^n.$$[33]

Y tenía razón.

[33] Para *x, y, z* números enteros mayores que *cero.*

Historia 2
¿Cuán grandes son los números grandes?
Historia de la vida en un día[34]

Para poder imaginar cuán grandes son los números grandes hace falta compararlos con situaciones que sean significativas para nosotros en la vida cotidiana.

Por ejemplo: para entender la diferencia entre 1 millón y 1000 millones basta ponerlo en segundos. Mientras 1 millón de segundos representa un poco más de 11 días, 1000 millones de segundos representan aproximadamente 32 años.

Decir que hay mucha sangre humana en el mundo es decir algo razonable. Pero si uno pudiera juntarla toda en un recipiente y arrojarla en la superficie del lago Nahuel Huapi, por poner una referencia, sólo elevaría la altura del lago en menos de 5 centímetros. Es decir, o bien hay muy poca sangre humana, o bien hay mucha agua.

A partir de esta idea quiero proponerle un ejercicio mental. Uno sabe que la Tierra tiene aproximadamente 4500 millones de años de edad. Es vieja, sin ninguna duda. Hagamos ahora el siguiente razonamiento: supongamos que uno encoge la vida de la Tierra a un solo día. O sea, imaginemos un segmento de 24 horas, de manera tal que al principio está el comienzo de la Tierra y al final del mismo segmento, a las 12 de la noche, los días actuales. Si así fuera, los dinosaurios no aparecerían hasta las 11 de la noche. Más aún: morirían todos 20 minutos antes de la medianoche. Y el hombre moderno recién empezaría a figurar dos segundos antes de la medianoche.

Lo más increíble es que toda nuestra historia, desde el comienzo de los tiempos (las pirámides incluidas), ocuparía menos de ¡una décima de segundo!

Reformulando la analogía, si uno mirara la historia de la Tierra como inscripta en la longitud de un brazo extendido, toda la historia de los seres humanos figuraría en el canto de una uña. Y si la historia de la Tierra estuviera representada por el monte Everest (la montaña más alta del mundo), su vida (sí, la suya) estaría representada por algo más fino que el grosor de un copo de nieve de la cima.

¿Tenía noción usted de que representábamos tan poco?

---

[34] Sobre una idea de Leonardo Moledo, Mary Gribbin y John Gribbin, también tomada por Cari Sagan en su famosa serie *Cosmos.*

Historia 3
El número π ("pi")

¿Qué es π? O también, ¿qué es "pi"? ¿Qué quiere decir? ¿Por qué se escribe así: π? ¿Por qué tanta reverencia y tanta fama?

Estoy seguro de que escuchó hablar muchas veces de π como de un *número* y se debe de haber preguntado (y seguirá preguntándose):

- ¿Qué número?
- ¿Cómo un *número?*
- ¿De qué hablan los que hablan de π?

Y habrá seguido: los números que conocemos son los que usamos todos los días: 1, 2, 3,..., 173, 1 millón, etc. O, en todo caso, los números *racionales* que también usamos (llamados *fracciones* o *quebrados),* como 1/2, 1/4, 2/3, 7/8, 5/3,..., etc. Creo que me entiende. ¡Ésos son los números! Por eso, otra vez insisto con la pregunta: ¿de qué hablan los que hablan de π?

Acompáñeme para poder descubrir qué lo hace tan atractivo, por qué se llama así, por qué es un número.

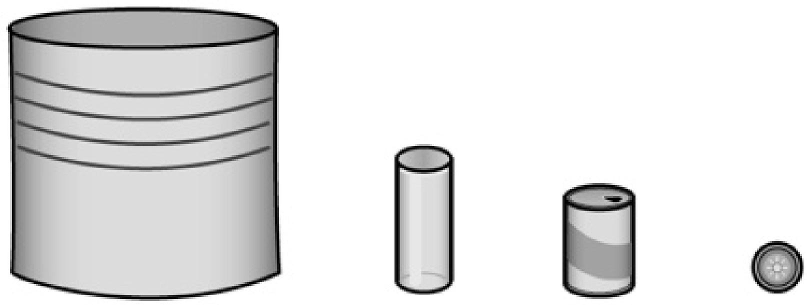
Uno podría plantear: si es un número -como todos dicen-, ¿por qué no es uno de los que usamos todos los días?, ¿qué es lo que uno debería saber de π y no sabe? Venga conmigo.

Suponga que ahora entramos juntos a un museo, donde π o "pi" está siendo exhibido como atracción principal. Lo que le propongo es una suerte de visita guiada, de manera tal de poder descubrir y disfrutar de una de las maravillas del mundo, como si estuviéramos juntos ante *La Gioconda* o el *Guernica,* o como si escucháramos *Aída* o la *Quinta Sinfonía* de Beethoven.

Para iniciar el trayecto, necesito que consigamos algunos objetos *circulares* o *cilíndricos* (de esos que, cuando se los *corta* transversalmente, se obtiene un círculo). Por ejemplo, una moneda cualquiera, una lata de bebida gaseosa, un tarro de pintura, un plato, un vaso en forma de cilindro, una botella de cerveza, etc.

Necesito también que tenga una cinta métrica, como las que usan los carpinteros o las modistas.

Ahora haga lo siguiente con cada objeto que consiguió:



a) Mida el diámetro de cada objeto y anote en una tabla los resultados (vea la tabla de p. 84).

b) Tome ahora la cinta métrica y *enrósquela alrededor* del objeto. Al hacer esto, usted está midiendo la circunferencia. Luego, anote los resultados en la tabla.

c) Por último, escriba en un papel los siguientes datos: en la primera columna, el objeto; en la segunda, el diámetro; en la tercera, la circunferencia que midió, y finalmente, en la cuarta columna, haga el siguiente cálculo: divida la medida de la circunferencia del objeto por el diámetro.

Tabla de resultados

Objeto	Diámetro	Circunferencia	Resultado
Cilindro	30 cm	94,2 cm	94,2/30

Mire los resultados que obtuvo, ¿puede sacar alguna conclusión? ¿Está sorprendida/o? ¿No le llama la atención?

Seguramente, habrá advertido que algo está presente en todos los cálculos... algo así como una constante. Dicho de otra forma, parecería que hay un número que se repite en todos los casos. ¿Será así?

Antes de sacar más conclusiones, haga ahora un nuevo experimento: busque otros objetos circulares.[35] Mídales el diámetro. Pensando en lo que "dedujo" más arriba, ¿se atreve a predecir cuánto mide la circunferencia?

Acá le pido un favor: no siga leyendo. Desde luego, haga lo que prefiera, pero creo que vale la pena que primero complete las pruebas propuestas más arriba, hasta que se sienta satisfecha/o y con la seguridad de haber entendido.

Por supuesto, más allá de *predecir* lo que tendría que pasar, la/ lo invito a que después corrobore que lo que predijo es cierto, y la única manera posible es *midiendo.* Una vez que lo haya hecho, podrá deducir si lo que conjeturó es válido o no.

Ahora sí, un paso más: lo maravilloso es que no importa qué objeto circular usted elija, del tamaño de una naranja o de todo el planeta, siempre, si uno mide la circunferencia y el diámetro y averigua el cociente, el número que resulta ¡es constante! Ese número es el que llamamos π.

p virtualmente ha enloquecido a todos los que han intentado abordarlo durante miles de años. Y digo "enloquecido" en el sentido más fino y atractivo de la palabra. Gran cantidad de gente a lo largo de la historia ha querido domarlo, conocerlo, develar sus misterios... y si bien se conocen muchísimas de sus propiedades, todavía queda otro tanto por descubrir.

Es que p tiene una fortaleza tremenda y una ubicuidad asombrosa. Aparece en los lugares más impensados, que en apariencia no guardan ninguna relación entre sí, y resulta totalmente impredecible.

Para empezar, vayan algunos datos:

1) Los primeros números del desarrollo decimal de p son: 3,14159.
2) π es un número *irracional* (en el sentido de que no es posible obtenerlo como cociente de dos números enteros). Johann Lambert probó este hecho en 1761.
3) π es, además, un número *trascendente* (una clase aún más privilegiada dentro de los irracionales).[36] Ferdinand Lindemann lo demostró en 1881.

[35] Cuando escribo "circular" quiero decir "literalmente circular", o sea, que se trate "exactamente de un círculo".
[36] Un número real se llama *trascendente* cuando no es la raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Debido a esto, se sabe que p no puede escribirse como *ninguna combinación finita* de números enteros y/o de sus raíces.

4) Justamente, el hecho de que p sea trascendente hace imposible lograr la cuadratura del círculo. ¿Qué quiere decir esto? Que si usted tiene un círculo cualquiera no es posible construir *con regla y compás* (no existe, ni podrá existir) un cuadrado cuya área *sea igual* a la del círculo. Estos dos hechos parecen desconectados, pero quien los une es la propia matemática.

5) En 1647 aparece por primera vez en la literatura la letra griega π (que sería el equivalente de nuestra letra "p")

6) El desarrollo del número p sigue así: 3,1415926535. Durante muchos años, generaciones enteras se entretuvieron buscando la mejor manera de aproximar el número p como cociente de dos números enteros. Las que más trascendieron, y por lo tanto las más conocidas, son:

   I. 22/7 = 3,142857142. (que coincide en los primeros *dos* decimales)

   II. 333/106 = 3,141509433. (que coincide en los primeros *cuatro* decimales)

   III. 355/113 = 3,1415929203. (en este caso, coinciden las primeras *seis* cifras decimales)

7) p tiene infinitas cifras decimales, que no se repiten, no siguen un patrón. A través de la historia, los matemáticos de todas las épocas dedicaron mucho tiempo a la esperanza de determinarlas todas (o de predecirlas todas, como uno puede hacer con un número racional); por supuesto, sin éxito.

8) La Biblia contiene dos referencias al número π y en ambas se menciona que es igual a 3. Sin embargo, los antiguos egipcios, árabes y hebreos solían darle a p (aunque no usaran ese nombre) un valor que era un *poco mayor que* 3.[37]

representando el número que nos ocupa. La introduce William Oughtred, que usa otra letra del mismo alfabeto, nuestra "d", junto con la "p": *p.d.* Oughtred usó esa combinación para indicar el "perímetro-diámetro". Sin embargo, el primero que empleó la letra como símbolo para representar el número 3,14159... fue William Jones en 1706, en *Synopsis Palmariorum Matheseos.* Y luego llegó Leonard Euler, el matemático suizo, y la hizo popular para siempre.

[37] Las referencias de la Biblia están en Los Reyes, 7: 23, y Crónicas, 4: 2. En ambas, como dijimos, el valor considerado era de 3 (como indica Wells en el libro que publico en 1986, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*). Tanto los egipcios como los babilonios le daban un valor de 22/7. Los chinos, en ese sentido,

9) Como escribí más arriba, lo más conocido sobre el número involucra la fórmula para calcular el *perímetro* de una circunferencia de diámetro d:

$$\text{Longitud} = \pi \times d$$

Pero, por otro lado, el número π aparece al calcular la superficie de un círculo o el volumen de una esfera.
El área de un círculo de radio r se obtiene así:

$$\pi \times r^2$$

Y el volumen de una esfera de radio *r,* así:

$$(4/3)\ \pi \times r^3$$

10) Aunque parezca increíble, hay un día conocido como "día del número π". Esto sucede todos los 14 de marzo ya que, usando la notación que escribe primero el mes y después el día, y si uno acepta el número 3,14 como aproximación de π, entonces el 3/14 o el 3-14 significa marzo 14. Esto sucede desde 1988, cuando el físico Larry Show, conocido como el "Príncipe de Pi", propuso instaurarlo, y la sugerencia fue aceptada por una buena parte del mundo.

11) De todas formas, más allá de la curiosidad por tener la mayor cantidad de cifras decimales posibles, el astrónomo norteamericano Simon Newcomb aseguró que con diez de ellas sería suficiente para calcular la circunferencia de la Tierra con un error menor a un centímetro.

12) La idea de que "pi" estaba solamente ligado a circunferencias y círculos duró hasta el siglo XVII, cuando se empezaron a estudiar otras curvas (hipocicloides, catenarias, braquistócronas, por poner algunos ejemplos) y

---

ofrecían una mejor aproximación, ya que llegaban hasta los seis decimales correctos (tal como aparece en la enciclopedia de Wolfram, *MathWorld*, <http://mathworld.wolfram.com>).

se descubrió que, al calcular las áreas relacionadas con ellas, también involucraban el número π.

13) Un poco más acá en el tiempo, "pi" termina su contrato de exclusividad con la geometría y aparece ligada a otras ramas de la matemática: números complejos, teoría de números, probabilidades y estadísticas, series numéricas.

Por último, como uno no se va a pasar la vida midiendo circunferencias y diámetros de objetos circulares para poder calcular π, lo invito a recorrer un par de caminos que conducen a π y que no son necesariamente los más conocidos. Eso sí: como la literatura que hay sobre este tema es muy vasta, cualquier cosa que yo escriba acá será como tirar una gota en el océano: no afectará -virtualmente- en nada el volumen. Pero eso no quiere decir que no nos cambie el volumen a usted y a mí. De hecho, como ambos sabemos poco de él, todo lo nuevo que incorporemos resultará atractivo y desafiante. Por eso es que la/lo invito a que recorramos juntos este camino. Acá va.

a) John Wallis (1616-1703) descubrió la siguiente fórmula:

$$\pi/2 = 2/1 \times 2/3 \times 4/3 \times 4/5 \times\bullet\ 6/5 \times 6/7 \times 8/7 \times 8/9 \times \ldots$$

Como usted advierte, uno *no* puede multiplicar infinitos números. Sin embargo, esta fórmula dice que, si uno quiere calcular la mitad de π, lo que puede hacer es aproximarse sucesivamente haciendo los productos que se indican allí. Es decir, uno puede empezar con esta sucesión:

2/1 = 2
2/1 · 2/3 = 4/3
2/1 · 2/3 · 4/3 = 16/9
2/1 · 2/3 · 4/3 · 4/5 = 64/45
2/1 · 2/3 · 4/3 · 4/5 · 6/5 = 384/225
2/1 · 2/3 · 4/3 · 4/5 · 6/5 · 6/7 = 2304/1575
2/1 · 2/3 · 4/3 · 4/5 · 6/5 · 6/7 · 8/7 = 18 432/11 025
2/1 · 2/3 · 4/3 · 4/5 · 6/5 · 6/7 · 8/7 · 8/9 = 147 456/99 225

Y así siguiendo...

Si uno sigue generando números de esta forma, se va aproximando a la mitad de p tanto como quiera. Lo que sabemos es que no vamos a llegar *nunca* al número exacto, porque eso querría decir que el número p es racional (y sabemos que no lo es).

De todas formas, es una manera muy bonita de ir aproximándose al número p/2 o, lo que es lo mismo, al número π.

b) Uno de los matemáticos más brillantes de la historia, cofunda- dor del cálculo, fue Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Así como Wallis encontró una fórmula que aproximaba la mitad de π, Leibniz encontró otra, que aproxima un cuarto de π.

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - \ldots$$

Como antes, cada paso provee una *mejor* aproximación a π, de manera tal que se genera la sucesión siguiente:

$$1 = 1$$
$$1 - 1/3 = 0{,}666666\ldots$$
$$1 - 1/3 + 1/5 = 0{,}866666\ldots$$
$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 = 0{,}723809517143\ldots$$
$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 = 0{,}834910634921\ldots$$
$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 = 0{,}744011544012\ldots$$
$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 = 0{,}820934620935\ldots$$

De esta forma, cuantos más *pasos* uno da, más se acerca al número (π/4).

c) El siguiente experimento provee también una aproximación de π que es espectacular. El método se conoce con el nombre de "El problema de la aguja de Buffon". Fue investigado en 1777 por el naturalista y matemático francés Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788).[38]

[38] Para más información sobre Buffon y el método experimental propuesto puede consultar <http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/buffon.html>.

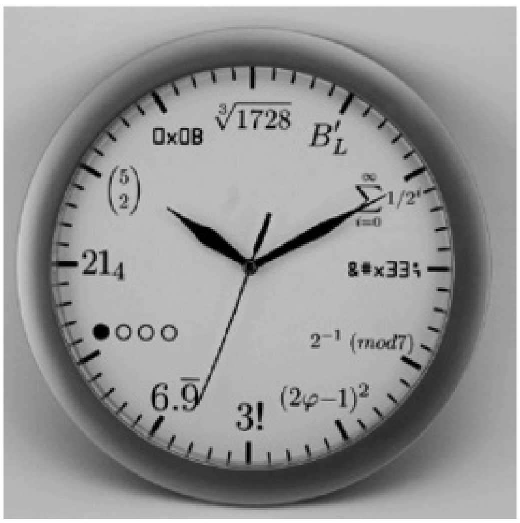
Necesitamos algunos elementos (no muchos): consiga unos fósforos y sáqueles la cabeza, o bien palillos o mondadientes (o incluso agujas para coser).

En una hoja de papel, dibuje líneas paralelas (como si fueran renglones), separadas unas de otras al doble de la medida de las agujas o de los mondadientes. Ahora, deje caer cada aguja sobre la hoja de papel, desde unos 30 centímetros de altura (aproximadamente). Cuente el número de agujas que o bien tocan o bien cruzan una de las líneas que dibujó.

Y ahora haga el siguiente cálculo: divida la cantidad de agujas que o bien tocan o cruzan una de las líneas por el número de agujas que tiró. El número que obtenga será una aproximación al número $2/\pi$. Naturalmente, cuantas más agujas intervengan en el experimento, mayor será la precisión con la que podrá calcular el valor de π.

Historia 4
Reloj

Hace poco me regalaron el reloj cuya foto aparece acá al lado. En sí mismo es un reloj precioso (y no estoy tratando de hacer publicidad sino de contar el impacto que me produjo), ya que en los lugares donde habitualmente van los números del 1 al 12 están indicados algunos cálculos. Como es fácil imaginar, el resultado de cada uno de ellos es previsible por el "lugar" en el que están distribuidos.



De todas formas, me parece que vale la pena que proponga la solución de algunos de los números. No digo todos, porque no todos son fáciles de explicar o accesibles sin un poco de desarrollo matemático. Pero para aquellos interesados, créanme que vale la pena dedicarle un tiempo a tratar de descubrir qué significa cada uno.

Acá van algunos razonamientos.

1) En el lugar donde figuraría el número 12 está escrito: $^3\sqrt{}(1728)$ (o sea, la raíz cúbica de 1728). Justamente, si uno calcula:

$$12^3=1728$$

Es decir, si uno eleva al cubo el número 12 obtiene 1728, y esta propiedad explica que ese número aparezca allí donde debería estar el 12.

2) En el lugar donde debería estar el número 6 figura lo que se denomina el *factorial de 3,* y se escribe con un signo de admiración: *3!*

Recordemos una vez más que el factorial de un número entero positivo cualquiera (digamos n) resulta de multiplicar todos los números del 1 al *n.* Por ejemplo, en el caso de 3! = 6, porque

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Por otro lado, 7! = 5040, porque si uno multiplica todos los números entre 1 y 7 obtiene 5040.

3) En el lugar donde debería figurar el número 7 aparece escrito 6.9 (con esa rayita arriba), que es una manera de abreviar: 6,9999999... Es decir, el número 6,99999... (con infinitos números 9) y el 7 son, en tanto números, iguales. Es sólo una manera diferente de escribirlos.

4) Allí donde debería figurar el número 8 aparecen cuatro círculos: el primero totalmente *negro* y los otros tres, en blanco. Esto representa la forma de escribir el número 8 *en binario,* o sea, usando números *unos* y *ceros.* En este caso, el número que estaría representado es el 1000, que en notación *binaria* significa:

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 =$$
$$1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 8$$

5) En el lugar donde debería figurar el número 4 está escrito: 2^{-1} (mod7). ¿Qué involucra esta fórmula?

Si bien no dispongo aquí del lugar necesario para escribir algo razonablemente comprensible, quiero dar al menos una brevísima explicación. Eso sí: le pido que no se asuste ni se preocupe si no entiende todo lo que sigue. Créame que es muy sencillo, mucho más de lo que parece o de lo que soy capaz de transmitir. Quizás usted sospeche que hay muy alta matemática involucrada, pero no es así: es algo fácil. Sólo que, como con todas las cosas, es *fácil* una vez que uno lo pensó durante mucho tiempo, hizo muchos ejercicios y superó el grado de dificultad que presenta... cosa que usted, muy posiblemente, no hizo ni tiene pensado hacer por el momento. Una observación sencilla: cuando uno escribe, por ejemplo:

$$2^{-1}$$

que es lo que figura (al principio) en la fórmula, es porque está escribiendo en forma abreviada lo siguiente:

$$2^{-1} = 1/2$$

O sea, cuando aparece un número cualquiera *n elevado* al exponente (-1), lo que quiere decir es:

$$n^{-1} = 1/n$$

Ahora sí, avancemos juntos.

Supongamos que usted quisiera dividir cualquier número entero por 7, ¿cuántos restos puede obtener? (Piénselo y, si me permite sugerirle algo, no siga leyendo hasta que no haya *entendido* la pregunta. La respuesta no es importante, pero lo que sí importa es que haya entendido la pregunta.)

Dicho esto, y contando con que se tomó un cierto tiempo para pensar, contesto yo: se pueden obtener exactamente *siete* restos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Por ejemplo:

El resto de dividir 342 por 7 es 6
El resto de dividir 214 por 7 es 4
El resto de dividir 936 por 7 es 5
El resto de dividir 735 por 7 es 0
El resto de dividir 561 por 7 es 1
El resto de dividir 437 por 7 es 3
Y el resto de dividir 632 por 7 es 2.

O sea, cualquier número entero dividido por 7 tiene que tener alguno de estos restos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Más aún: estos números son todos los posibles. No se puede encontrar ninguno más.

Estos números (o restos) se llaman "enteros módulo 7". No se asuste con los nombres. No vale la pena. Haga de cuenta que uno está dividiendo por 2. ¿Cuáles son los posibles restos? (Aquí usted se da cuenta de que los posibles restos son nada más que dos: 0 y 1. O sea, los pares y los impares.) Si ahora uno dividiera cualquier número por 3, entonces tendría *tres* posibles restos: 0, 1 y 2.

En general, si uno divide cualquier número entero por el número *n* se obtienen exactamente *n* posibles restos. En el caso que nos ocupa, el del 7, hay exactamente *siete* restos.

Por otro lado, con estos restos se pueden formular *dos operaciones,* equivalentes a la suma y al producto a los que estamos acostumbrados. Se tienen entonces las siguientes dos tablas: una para sumar y otra para multiplicar restos:

Para sumar:

suma	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Para multiplicar:

producto	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	3	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Figura 1

Por ejemplo: si usted multiplica 2 x 4 “debería” obtener 8, pero, al dividirlo por 7, *el resto* es el número 1, y por eso, justamente, el número que aparece en la intersección de la fila 2 con la columna 4 es el 1. De la misma forma, si uno multiplica 6 x 4 “debería” obtener 24, pero, al dividirlo por 7, el *resto* es el número 3. En consecuencia, en la intersección de la fila 6 con la columna 4 aparece el 3.

Ahora bien: tome un número cualquiera (entero), digamos el 17. ¿Por cuál tiene que multiplicarlo para obtener *1* como resultado? La respuesta es por 1/17. Y este número 1/17 = 17^{-1} (como vimos más arriba).

Por otro lado, si le pidiera que encontrara el número por el cual tiene que multiplicar a 3 para obtener 1, ¿qué me contestaría? Me diría que es: 1/3. O sea, 3^{-1}.

En el caso de los restos módulo 7 es lo mismo. Si uno quiere determinar cuál es el número por el cual tiene que multiplicar a 2 para obtener el número 1 (fíjese en la tabla de la figura 1), el número que cumple con eso es... ¡el 4! Y ésa es la razón por la que figura en el reloj en el lugar del 4: "El inverso multiplicativo del número 2 entre los enteros módulo 7 *¡es el 4!".*

6) Donde figura el número 2 está escrito:

$$\sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i$$

¿Cómo se interpreta esto? En realidad, es una forma *abreviada* de escribir:

$$1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + 1/2^5 + 1/2^6 + \ldots =$$

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + \ldots$$

Es decir, se trata de sumar infinitos términos.[39] Como usted con vendrá conmigo, es imposible sumar infinitos números, pero lo que sí podemos hacer es mirar si se aproximan a algún número a medida que uno va sumando más y más.

Por ejemplo: supongamos que usted está parado a 2 metros de mí. Y yo le digo que camine hacia mí dando ciertos pasos. Le voy a indicar qué tipo de pasos tiene que dar, en el sentido de que la regla que usted tiene que seguir es la siguiente: cada paso que dé tiene que servir para cubrir exactamente la mitad de la distancia que lo separa de mí. Por ejemplo, el primer paso tiene que ser de... (¿no le dan ganas de pensar cuál tiene que ser la *longitud* del paso?... Recuerde que al principio usted y yo estábamos a 2 metros de distancia).

Le decía que el primer paso tiene que ser de *1 metro* (ya que estamos separados por 2 metros). El paso siguiente tendrá que ser de medio metro, ya que ahora estamos separados sólo por 1 metro de distancia. El siguiente será la mitad de 1/2,

[39] Importa mucho que la *suma* de los términos (representada por la letra griega Σ empiece con $i = 0$ y no con $i = 1$ porque, si no, el resultado cambia.

o sea, 1/4. El próximo será de 1/8. y así siguiendo. Es decir que, en definitiva, usted estará sumando cada vez más números, cada vez se estará acercando más y más a mí, pero nunca va a llegar. Sin embargo, la distancia que nos separa será cada vez más pequeña, y la podemos hacer tan pequeña como nos lo propongamos. Dicho todo esto, ¿cuánto dará la suma de esos infinitos números como está planteado originalmente? ¿Puede relacionar lo que acabo de escribir con el número que representa la serie que figura en ese lugar del reloj?

Respuesta: Al igual que lo que sucedía al dar cada vez un paso que significaba la mitad del anterior, o bien la mitad de lo que faltaba, los pasos van a estar representados por esa serie cuya suma es ¡igual a 2!

Originalmente la distancia entre ambos era de 2 metros. A medida que usted va caminando, la distancia se reduce a la mitad, y el camino que usted recorre se va acercando a 2 tanto como quiera (pero no lo alcanza). De hecho, lo alcanzaría si se pudieran *sumar los infinitos términos.*

7) Ahora voy a explorar lo que significa

$$(2\,\varphi - 1)^2 \quad (*)$$

La primera pregunta es: ¿cuál es el número φ? En realidad, antes habría que hacer varias preguntas, porque ¿quién dijo que j es un número?

Bien, el número j es lo que se conoce como *la razón dorada* o *la razón divina,* o la proporción áurea. Todos éstos son nombres que ligan a un número muy peculiar

$$\varphi = (1 + \sqrt{5}\,)/2$$

con la sucesión de Fibonacci. Pero por ahora me voy a contentar con averiguar quién está ocupando el lugar del 5 en el reloj.

Justamente, si $\varphi = (1 + \sqrt{5}\,)/2$, hagamos (juntos) el cálculo que figura en (*).

Se trata de multiplicar por 2 el número j, luego restarle 1, y elevar el resultado al cuadrado. Hagámoslo:

a) Primero multiplicamos el número φ por 2. O sea,

$$2 \times [(1 + \sqrt{5})/2] = (1 + \sqrt{5})$$

b) Al resultado ahora hay que restarle -1, como figura en (*):

$$[(1 + \sqrt{5})] - 1 = \sqrt{5}$$

c) ahora sólo resta *elevar* este último número al cuadrado:

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

Moraleja: La fórmula que ocupa el lugar del 5 es en realidad una forma sofisticada de escribirlo, ya que involucra a la razón dorada o a φ, el número de oro.

8) En el lugar del 9 figura lo siguiente: 21_4. ¿Qué querrá decir esto? ¿Se acuerda de los números binarios, es decir, los números escritos en *base* 2? Son los que usan las computadoras, que sólo *reconocen 0 y 1.*
En el punto 4, donde hablaba del símbolo que figura en el reloj indicando las 8, se veían cuatro círculos, el primero en negro y los tres siguientes en blanco. Y correspondía al número 8, porque entendíamos esa notación como:

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 =$$
$$1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 8$$

Ahora bien, de la misma manera que uno puede tomar el 2 como base de la escritura, también puede tomar *otro* número. Elijamos, por ejemplo, el 4. En este caso, en lugar de haber solamente dos dígitos -como sucede con los números binarios, donde aparecen el 0 y el 1-, al escribir un número en base 4 hay cuatro dígitos involucrados: 0, 1, 2 y 3. Por ejemplo, el número

$$123_4 = 1 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 3 \times 4^0$$
$$= 1 \times 16 + 2 \times 4 + 3 \times 1$$

$$= 16 + 8 + 3 = 27$$

Por lo tanto, siguiendo este procedimiento, el número que figura en el reloj allí donde debería ir el 9 es el 21_4. Usemos ahora lo que hemos aprendido.

$$21_4 = 2 \text{ x } 4^1 + 1 \text{ x } 4^0 = 9$$

O sea que el número que aparece en lugar del 9 en el reloj es la forma de escribir (justamente) ese número en base 4.

9) ¿Qué quiere decir $\binom{5}{2}$?

A esto hay que pensarlo así. Supongamos que tiene cinco camisas, está a punto de viajar pero no quiere llevárselas todas. Quiere elegir nada más que dos.

Digamos que las cinco camisas son: una roja (R), una azul (A), una verde (V), una negra (N) y una blanca (B). ¿De cuántas formas se puede elegir ese par que quiere llevarse? Las posibilidades son:

RA RV RN RB AV AN AB VN VB NB

Es decir que hay *diez* posibilidades. Ahora bien: como usted se imagina, no sería práctico, cada vez que uno tiene que contar de cuántas maneras se pueden elegir algunos objetos entre otros, hacer una lista de todos para saber cuántos son. En este caso fue fácil, porque eran nada más que cinco camisas, pero ¿se imagina si tuviera que elegir cuarenta personas entre un grupo de *un millón?*

Justamente, la rama de la matemática que se dedica a contar, sin necesidad de hacer una lista de todos los posibles casos, se llama *combinatoria.* En el caso que nos ocupa, de las cinco camisas de las cuales hay que elegir dos, aparece en escena un número como el que figura en el reloj: (2). Lo que este número representa es:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!} 2! = \frac{(5x4x3x2x1)}{(3x2x1)(2x1)} = \frac{120}{6x2} = 10$$

donde usé el factorial de un número, tal como vimos en el punto 2. Luego, el número combinatorio

$$\binom{5}{2} = 10$$

y eso explica su lugar en el reloj.

10) Donde debería haber un número 11 aparece escrito: 0x0B. ¿Por qué?

Así como hemos visto más arriba que los números enteros se pueden escribir usando diferentes bases, la más frecuente es la base decimal. Uno no necesariamente le presta atención, pero cuando escribe el número 2735, en realidad está escribiendo en forma abreviada lo siguiente:

$$2735 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$2735 = 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 3 \times 10 + 5 \times 1$$

$$2735 = 2000 + 700 + 30 + 5$$

Además, estamos tan acostumbrados a esta notación que usamos *solamente* 10 dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

¿Qué pasaría si uno quisiera tener un dígito para el número 10? ¿O para el 11? Uno podría seguir adjudicando dígitos para el 12, 13, 14, etc. En el caso del reloj, lo que se utiliza es lo que se llama notación *hexadecimal* (porque tiene *16* dígitos). Los 16 incluyen los *10 conocidos* (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9), pero además aparecen las letras A, B, C, D, E y F, que significan: 10, 11, 12, 13, 14 y 15.

Por ejemplo, el número 0x0B debe ser interpretado así: la primera parte, 0x, significa que el número que sigue está escrito en notación hexadecimal. La segunda parte, en este caso 0B, indica qué número es (recuerde que la letra B era el dígito que usábamos para el 11):

$$0B = 0 \times 16^1 + B \times 16^0 = 0 \times 16 + 11 \times 1 = 11$$

y esto termina de explicar por qué en el reloj figura 0x0B en el lugar del 11.

11) Donde debe ir el 1 figura lo siguiente: B'_L. Acá hace falta contar (al margen de la matemática) un poquito de historia.

Se sabe que hay infinitos números primos (como hemos visto en el primer volumen de *Matemática... ¿estás ahí?).* Esto significa que, si usted me dijera: "Encontrá un número primo más grande que 1000", yo tendría que ser capaz de encontrar uno. Y si me pidiera que encontrara uno más grande que 1 000 000, también tendría que encontrarlo. En definitiva, no importa cuán grande sea el número que usted elija, yo siempre podré encontrar un número primo más grande. La pregunta que uno puede hacer es la siguiente: ¿cuántos primos menores o iguales que 1000 hay? O bien, ¿cuántos primos menores o iguales que 1 000 000 hay? ¿Y cuántos hay menores que 10 000 000 000?

Lo interesante es que existe una manera de medir cuántos primos hay menores o iguales que un cierto número x, y se conoce con el nombre (no se asuste, es sólo un nombre) *pi(x).* Es decir, pi(x) estima (o calcula) cuántos números primos hay menores o iguales que *x*. Por ejemplo:

$$pi(3) = 2, pi(10) = 4, pi(25) = 9, pi(1000) = 168, pi(1\,000\,000) = 78\,498$$

Ahora bien: ¿cómo hacer para *estimar* el valor de pi(x) para cada valor de x? Por supuesto, uno podría hacer todas las cuentas. Por ejemplo, si nos pidieran que calculáramos cuántos primos hay menores que *1 millón,* o sea, calcular pi(1 000 000), podríamos hacer una lista de todos los que hay, contarlos y dar el resultado. Pero, como advierte, éste es un método muy poco económico, aun con las computadoras más potentes.

Hay un teorema, sin embargo, que resolvió este problema. Y dice así: "Si quiere calcular el valor de pi(x) haga lo siguiente: calcule log(x), que es el valor del logaritmo de x, y ahora divida *x* por el log(x)".O sea, calcule

$$x / \log(x)$$

y el número que obtenga será una muy buena aproximación del valor de pi(x).

Dicho todo esto, el matemático francés Adrien-Marie Legendre conjeturó que cuando el número *x* es cada vez más grande, la diferencia

Log(x) - x/pi(x)

se aproxima más y más a un número que él llamó B. Con el tiempo, se comprobó que ese número B era en realidad 1, y la notación B'_L indica que la *constante* de Legendre (de allí la letra L) es en realidad igual a *1...* Y ésa es la razón por la cual figura en el reloj en lugar del 1.

12) El último número que voy a explicar es el 3. En ese lugar aparece una sucesión de símbolos:

3

Que es la forma como se puede escribir el número 3 en el formato "html", que se usa cotidianamente para diseñar y crear las páginas web en Internet.

HTML son las iniciales de HyperText Markup Language. En ese lenguaje (una suerte de código o conjunto de instrucciones), si uno quiere generar un número 3, lo hace escribiendo la sucesión de símbolos 3[40]

Por otro lado, otro profesor (esta vez español), José Ignacio Burgos, investigador del CSIC (Consejo Superior de Investigaciones Científicas de España) con sede en Madrid, consultado por Carlos D'Andrea, asegura:

En la codificación Unicode y en html los caracteres especiales se representan con por ejemplo é [la letra "e" con tilde] es **&eacute** [en inglés, acute significa "tilde"]

Para representar un carácter conociendo su número ASCII se escribe:

&#..

El símbolo de sostenido en música, o #, indica el código ASCII (iniciales de American Standard Code for Information Interchange: Código Americano Estándar

[40] Matilde Lalín es una amiga, doctora en Matemática, que hoy trabaja en Canadá. Ella fue quien me sugirió un lugar donde encontrar la explicación que aparece más arriba. Si a usted le interesa avanzar un poco más en este sentido, una referencia posible es:
<http://zvon.org/other/ charSearch/PHP/search.php?request=33&searchType=3>.

para el Intercambio de Información, basado en el orden que tienen las letras en el alfabeto inglés). Los códigos ASCII representan texto en las computadoras. El código ASCII del carácter 3 es 51. La representación hexadecimal de 51 es x33. En resumen: al poner 3 con & anunciamos que viene un carácter especial, y con # que el carácter especial es x33, que a su vez es la forma hexadecimal de escribir el número 51, y 51... es el número 3.

Historia 5
Días que duraban 23 horas

¿Pensó alguna vez cuántos segundos tiene un día? Posiblemente no, o tal vez esta pregunta le resulte irrelevante. Sin embargo, la respuesta permite entender cómo se *define un segundo.*
¿Cómo hacer entonces? Hagamos (juntos) algunos cálculos muy sencillos.
Primero, los datos fáciles:

1 día = 24 horas
1 hora = 60 minutos
1 minuto = 60 segundos

Ahora, *vayamos por más.* Como cada minuto se compone de 60 segundos, eso significa que en 1 hora (60 minutos) hay (60 x 60) = 3600 segundos.
Por otro lado, como en un día hay 24 horas, y cada hora tiene 3600 segundos, entonces,

24 x 3600 = 86 400

y ésta es la cantidad de segundos que hay en un día: 86 400.
Con este dato, entonces, uno podría decir que

1 segundo = 1/86 400 de un día

¿Por qué hice todos estos cálculos? Sígame por acá: la rotación de la Tierra alrededor de su eje varía la velocidad a medida que avanza el tiempo. Es decir, se sabe que el efecto de la Luna y las mareas *enlentecen* esa rotación y, por lo tanto, *aumentan* la longitud de un día en 3 milisegundos ¡por siglo! Como la Tierra tarda más tiempo (aunque en forma muy imperceptible) en completar una vuelta alrededor de su eje, entonces cada día es un poquito más largo.

Es muy probable que no lo hayamos notado, porque el día aumenta en 3 milisegundos por siglo, lo que significa que dentro de 1000 siglos (100 000 años), cada día va a durar 3 segundos más. Usted se preguntará (quizá con razón) a quién le importa esto. O en todo caso, ¿cómo me afecta a mí? Posiblemente en nada, pero antes de que deje de leer estas líneas la/lo invito a pensar conmigo lo siguiente. De la misma forma en que uno puede predecir lo que sucederá en 100 000 años (si es que el hombre no se ocupa de destruir todo), uno puede hacer el camino inverso y mirar hacia atrás. Es decir, si la Tierra gira cada vez más lentamente alrededor de su eje, es porque en el pasado giraba más rápido.

Y si uno supone que la desaceleración ha sido constante en el tiempo, se puede conjeturar lo que ocurría antes y hacer la cuenta de *cuánto menos duraba un día hace algunos años.* Y eso es lo que quiero hacer.

100 000 años atrás días 3 segundos más cortos

Por lo tanto, multiplicando por 1200, tenemos:

120 000 000 años atrás días 3600 segundos más cortos

Es decir, hace 120 millones de años la Tierra tardaba 3600 segundos *menos* en dar una vuelta alrededor de su eje. Y aquí es donde quería llegar, porque, como ya vimos que 3600 segundos equivalen a una hora, entonces, hace 120 millones de años, los días en la Tierra duraban 23 horas.

Yo sé que ni usted ni yo vivíamos en esa época, pero los dinosaurios sí, y como todo el mundo parece siempre tan interesado en lo que sucedía en esos tiempos, es bueno que sepa que los días eran mucho más cortos: duraban una hora menos. Eran, literalmente, días de 23 horas.

Historia 6
(25 / 5) y un tributo a la creatividad

En un video que aparece en YouTube,[41] subido a la red el 7 de marzo de 2007, se reproduce un segmento de una serie norteamericana *(Ma & Pa Kettle)* que se veía en la década de los cincuenta. Los actores eran Percy Killbride, que hacía de padre ("Pa", Franklin Kettle), y Marjorie Main, que desempeñaba el rol de la madre ("Ma", Phoebe Kettle). Lo notable es que en el breve lapso de 2 minutos y 30 segundos se puede ver una excelente manera de dividir, que contiene todos los errores imaginables y que transforman ese clip en algo desopilante. Si puede acceder a una computadora y conectarse a Internet, le sugiero que lo haga y le dedique ese tiempo al video, porque es imperdible.

Más allá de las barreras idiomáticas (el video está en inglés), las explicaciones en el pizarrón son tan claras como absurdas. Voy a tratar de hacer una *síntesis* de lo que allí sucede, pero estoy seguro de que no va a tener el mismo impacto que el que produce mirar el video. Igualmente, acá va.

Un vendedor trata de mostrarle al matrimonio Kettle que, como tiene que dividir 25 dólares entre 5 personas, van a corresponderle (dice él, correctamente) 5 dólares a cada uno. El matrimonio lo mira sorprendido, como invitándolo a que revise su posición. Es más, el marido le dice:

—Se equivoca. Si hay que dividir 25 dólares entre 5, le corresponden 14 dólares a cada uno.

Como la charla se desarrolla en la cocina y justamente allí hay un pizarrón, el vendedor toma una tiza y escribe lo que se ve en las figuras 1a, 1b y 1c.

[41] Lo que aparece acá es una miniadaptación porque, en la versión original, en lugar de hablar de cómo repartir 25 dólares, se habla de dividir el 25% de la venta de un terreno. A los efectos de lo que quiero mostrar en este caso, la modificación es irrelevante. Véase <http:// www.youtube.com/watch?v=oJS8GszWJuQ>.

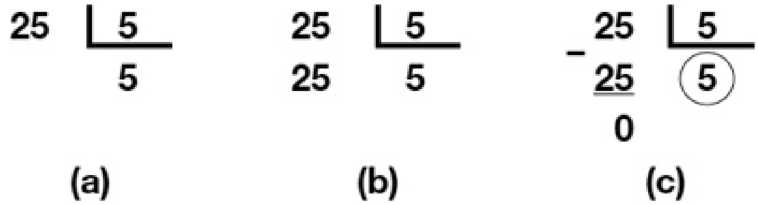


Figura 1

A continuación dice:

-25 dividido 5 resulta ser 5 (1a). Luego, como 5 por 5 es 25, lo anoto acá (1b). Luego resto los 25 de arriba con estos 25, y da ¡cero! (1c)

Aquí es donde interviene el marido, borra lo que está escrito en el pizarrón y dice:

—Está equivocado. Yo soy un buen matemático. Vea lo que sucede:

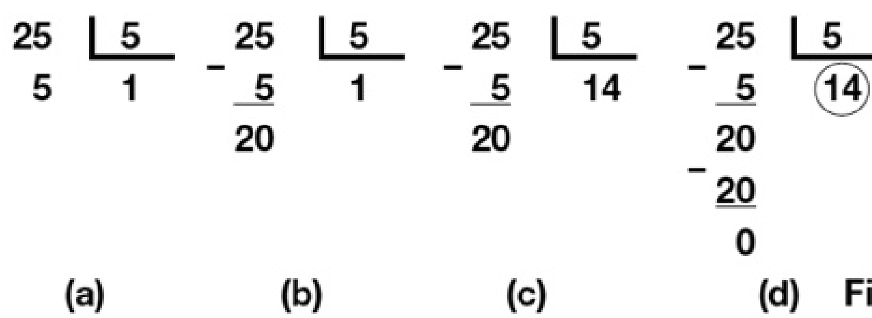


Figura 2

Y continúa:

-Quiero dividir 25 por 5. Como el 2 *no va* en el 5, entonces me queda el 5. Ahora: 5 dividido 5 es 1 (2a). Luego, resto el 5 de los 25 y quedan 20 (2b). Entonces, como 20 dividido 5 es 4, pongo acá el número 4 (2c). Y como 4 por 5 es 20, pongo acá el 20 (2d). Por último, resto 20 menos 20 y tengo 0 (2d).

Como se ve, entonces, 25 dividido 5 *¡es 14!*

El vendedor vuelve a tomar la tiza, borra lo que hay en el pizarrón y escribe:

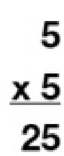


Figura 3

Continúa:

-Vea, déjeme convencerlo de esta forma. Si uno pone 5 y lo multiplica por 5, entonces obtiene 25.

La señora, que había permanecido en silencio hasta aquí, ocupa el centro de la escena. Borra el pizarrón y dice:

-Usted es el que tiene que ver:

14	14	15	
x 5	x 5	x 5	
20	20	20	
	5	5	
		25	
(a)	(b)	(c)	**Figura 4**

-Es decir: multiplique cinco veces 14 y fíjese lo que pasa: 5 veces 4 es 20 (4a), 5 veces 1 es 5 (4b). Luego, 20 + 5 es 25 (4c) -y al final, la señora tira la tiza, mortificada porque parecen no entenderla.

Casi a modo de conclusión el vendedor insiste:

-Señora, permítame probarle que está equivocada. Ponga 14 cinco veces (5a). Ahora, sumemos.

Toma la tiza y empieza a recorrer los números 4 que están encolumnados, mientras va describiendo en cada paso (al sumarlos): -4... 8... 12... 16... 20...

Y cuando está por escribir el "0", el dueño de casa se levanta, le *saca la tiza de la mano* y recorre ahora él los números 1 de la primera columna, empezando desde el 20, donde había terminado el vendedor:

-21, 22, 23, 24 y 25 -mientras apunta a cada uno de los cinco 1 que están encolumnados (figura 5b).

14	14
14	14
14	14
14	14
14	14
	25

Figura 5

Como se advierte, la secuencia es poco menos que imposible de transcribir, pero igualmente lo intenté porque quiero hacer el reconocimiento que corresponde, no sólo a los actores, sino también a los autores intelectuales de este episodio.

Más allá de lo gracioso que resulta, creo que ilustra cómo podría pensar una persona cualquiera a quien uno acusaría de estar equivocada, obviamente, pero que sin embargo estaría buscando su camino sin someterse a las reglas que establece la sociedad.

Claro, estaría mal. La cuenta no puede dar 5 por un lado y 14 por otro, pero la situación enseña que nuestras mentes funcionan en diferentes direcciones y que, en algunos casos, puede ser útil domarlas para que miren todas hacia el mismo lado, pero en otros podemos estar perdiéndonos la creatividad de alguien que sencillamente no piensa como nosotros.

Historia 7
Cara o ceca

Si algo le falta a este mundo cada vez más controvertido es que venga alguien y diga que tirar una moneda al aire *no* ofrece un 50% de posibilidades de que salga tanto "cara" como "ceca" (suponiendo, claro, que la moneda no esté "cargada"). Es decir, si hay algo que uno da por seguro en la vida es eso: 50% de chances para cada lado, "cara o ceca".

Esta suposición está tan incorporada que es casi como una manera de vivir. Pero ahora necesito decir: ¡no tan rápido! No esté tan seguro de que es así.

No crea que a mí no me impacta escribirlo tanto como a usted leerlo. La noticia me desconcertó también, y si no hubiera sido por la seriedad de los involucrados -los responsables intelectuales- no le habría dado mayor crédito. Pero, como Persi Diaconis es uno de los autores del trabajo, vale la pena prestar atención.

Diaconis nació en Nueva York, en enero de 1945, en una casa de músicos. Durante muchísimos años fue un mago profesional. Sí, un mago. Dejó el colegio a los 14 años y se dedicó a recorrer Estados Unidos con Dai Vernon, considerado el mejor mago de la historia norteamericana.

Diaconis era tan bueno generando nuevos trucos y aportando ideas que empezó a ganarse la vida haciendo magia. Pero su pasión -según él mismo confiesa- era estudiar probabilidades. Y así fue como, a los 25 años, terminó inscribiéndose en el New York City College, donde se graduó dos años y medio después. Lo curioso es que de inmediato fue invitado como estudiante de doctorado nada menos que a Harvard, y allí se doctoró en 1975. En Harvard primero, y en Stanford desde 1981, ha trabajado la mayor parte de su tiempo.

Lo interesante de Diaconis es que dedicó su vida a estudiar cosas que al resto de los humanos nos parecerían marginales. Por ejemplo, lo que lo hizo famoso *casi* instantáneamente fue que en un trabajo muy celebrado[42] demostró que si uno mezcla un mazo de cartas sosteniendo la mitad en cada mano y las entrelaza como se hace en los casinos, entonces alcanza con mezclar *siete* veces. Todo lo que uno

[42] "Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair" apareció en *Annals of Applied Probabilities,* 2(2): 294-313, 1992, y tiene a Persi Diaconis y Dave Bayer como coautores.

haga después es irrelevante. Es decir: si al terminar una mano de cualquier juego de naipes uno quiere tener la garantía de que el mazo quedará bien mezclado, alcanza con mezclarlo siete veces.

Algunos autores señalan que es suficiente con cinco o bien seis veces, pero teniendo en cuenta los parámetros (matemáticos) que quiere cubrir Diaconis, hacen falta siete veces para considerar que las cartas quedan mezcladas al azar.

Diaconis hizo muchísimos otros aportes en matemática, especialmente en temas vinculados con procesos aleatorios ("al azar"), y usó sus hallazgos con las cartas para abordar otros problemas que parecían, en principio, no tener relación entre sí.

El 28 de julio de 2009, David Adler, autor del libro *Snap Judgment* (algo así como "Juicio instantáneo" o "Sin pensar") -aparecido en septiembre del mismo año-,[43] hace referencia a un *nuevo trabajo* que involucra a Diaconis, esta vez con otros colaboradores: Susan Holmes y Richard Montgomery.

Los resultados son sorprendentes: cuando uno hace que una máquina especialmente diseñada arroje una moneda al aire, y puede controlar la fuerza con la que es disparada hacia arriba, entonces el resultado es predecible y uno puede anticiparlo, a tal punto que la máquina es capaz de hacer que el resultado sea siempre "cara".

Adler dice también en ese artículo que esto es esperable, teniendo en cuenta que, si uno puede controlar la fuerza, también puede calcular la cantidad de veces que la moneda girará en el aire y, por lo tanto, modificar esa fuerza hasta lograr que salga o bien "cara" o bien "ceca".

Sin embargo, lo que resulta realmente espectacular es notar que cuando hicieron el mismo experimento con seres humanos, si la moneda estaba en posición de "cara" antes de tirarla caía un 51% de las veces también en esa posición. Y si empezaba en "ceca", sucedía lo mismo. Es decir, ¡la posición inicial determina la *mayoría* de las veces el resultado final! Y escribo "mayoría" porque el resultado es mayor a un 50%.

Holmes, Montgomery y Diaconis[44] explican en el resumen:

[43] Mi amigo personal, el doctor Eduardo Cattani, un excelente matemático argentino que trabaja en la Universidad de Massachusetts, en Amherst, especialista en geometría teórica, funciones hipergeométricas y teoría de Hodge, fue quien me envió el artículo de Adler. Por lo tanto, el crédito le corresponde a él.

[44] "Dynamical Bias in the Coin Toss" ("Tendencias dinámicas al arrojar una moneda"), publicado en la revista *Society for Industrial and Applied Mathematics,* Filadelfia, 49(2): 211-234, abril de 2007.

Analizamos el proceso natural al arrojar una moneda con la mano. Comprobamos que una moneda arrojada consistentemente tiende a caer en la misma posición en la que salió. Lo que produce este hecho depende de un único parámetro: el ángulo entre la normal (perpendicular) a la moneda y el vector momento angular. Reportamos también las medidas de estos parámetros, basados en fotografías de alta velocidad. En condiciones normales, la probabilidad de que la moneda caiga en la misma posición en la que salió es de un 0,51 (o sea, un 51% de las veces).

Puede ser que a usted este episodio le resulte irrelevante. Sin embargo, créame que atenta contra lo que uno siempre sospechó y ahora parece no ser cierto: tirar una moneda al aire fue siempre una garantía de equidad, de igualdad.

Habrá que revisar nuestras viejas ideas y estar atentos. Al menos, cuando alguien quiera tirar una moneda para definir algo que la/ lo involucra, dígale que usted va a ser quien la arroje y quien elija. Y si quien la arroje va a ser otra persona, pídale ver cuál es la posición inicial y elija usted. De lo contrario, proponga otro método que garantice igual probabilidad porque, desde ahora, tirar una moneda al aire no es más un método confiable.

Historia 8
Aldea global

En el primer episodio de *Matemática... ¿estás ahí*? incluí un problema llamado "Aldea global". La idea era "imaginar" la realidad si la población de la Tierra se redujera a una "villa" de exactamente 100 personas. ¿Qué pasaría con ellas? Es decir, ¿cómo se distribuirían por categorías?

Las estadísticas han sido actualizadas sobre la base de publicaciones especializadas e informes sobre la población mundial elaborados por Naciones Unidas, PRB.org y otras fuentes. Los autores del texto original piden que quien lea las estadísticas, tenga en cuenta que son eso, estadísticas, y que en consecuencia podrían modificarse en el término de pocos meses o años. Por lo tanto, invitan a que sean consideradas una "tendencia" y no algo preciso y/o exacto.

Una aclaración más: en su mayor parte, el texto que figura a continuación no me pertenece. Más que nunca, soy simplemente un vehículo para informar y/o comunicar lo que es mérito de otros. El texto fue escrito por Donella Meadows y publicado por primera vez el 29 de mayo de 1990 (hace casi veinte años) bajo el título "Reporte sobre el estado de la Aldea".

La Tierra en miniatura[45]

Si pudiéramos reducir la población de la Tierra a una pequeña comunidad de 100 personas manteniendo las proporciones de hoy, el resultado sería el siguiente:

61 asiáticos

13 africanos

12 europeos

8 norteamericanos

5 sudamericanos y caribeños 1 de Oceanía

50 mujeres

[45] Las fuentes de la información que aparece publicada son:
(1) <http:// www.miniature-earth.com/me_spanish.htm>,
(2) <www.makepo- vertyhistory.org>,
(3) <www.millenniumcampaign.org>,
(4) <www. un.org/millenniumgoals/>,
(5) <http://sustainer.org/dhm_archive/index. php?display_article=vn338villageed>.

50 hombres

47 viven en un área urbana

9 discapacitados

33 cristianos (católicos, protestantes, ortodoxos, anglicanos y otras variantes)

18 musulmanes

14 hindúes o hinduistas 16 no son religiosos

6 budistas

13 practican otras religiones 43 viven sin sanidad básica

18 viven sin una fuente de agua potable 6 personas poseen el 59% de las riquezas de la comunidad

13 están hambrientos o desnutridos

14 no saben leer y sólo 7 tienen una educación de nivel secundario

Sólo 12 tienen una computadora Sólo 3 tienen conexión a Internet

1 adulto de quienes tienen entre 15-49 años padece VIH/sida La aldea asigna más de 1,12 billones de dólares a gastos militares y tan sólo 100 000 millones a proyectos para el desarrollo.

Si usted tiene comida en la heladera, guarda su ropa en un ropero, tiene una cama para dormir y un techo sobre su cabeza, entonces, es más rico que el 75% de la población mundial.

Si tiene una cuenta en el banco, entonces es una de las 30 personas más ricas del mundo.

18 luchan para sobrevivir con un dólar por día... o menos 53 luchan para sobrevivir con dos dólares por día o menos

17 hablarían mandarín 9 inglés 8 hindi o urdu 6 español 6 ruso y 4 árabe

Esta lista sólo contempla la lengua madre de la mitad de los habitantes de la villa. La otra mitad hablaría (en orden decreciente de frecuencia) bengalí, portugués, indonesio, japonés, alemán, francés y otros 200 idiomas.

Un tercio de la villa (33) serían niños. Sólo la mitad de ellos estarían inmunizados frente a enfermedades infecciosas prevenibles, tales como poliomielitis y rubéola.

6 de los 100 habitantes de la villa tendrían más de 65 años.

Sólo la mitad de las mujeres casadas tendría acceso a métodos anticonceptivos.

Todos los años se producirían 3 nacimientos y 1 muerte. Es decir, la villa tendría 102 personas al año siguiente.

Sólo 7 personas tendrían auto (algunas de ellas más de uno).

Una tercera parte de la población no tendría acceso al agua potable, y de los 67 adultos de la villa, la mitad (¡la mitad!) sería analfabeta.

Eso sí: la villa habría enterrado bajo tierra suficiente poder en armas nucleares para explotarse y destruirse a sí misma varias veces. Y estas armas estarían bajo el control de sólo 10 personas.[46]

F I N

[46] Al día de hoy, el Instituto de la Sustentabilidad, a través de la Fundación de Donella, lleva adelante el proyecto llamado "The Miniature Earth" ("La Tierra en miniatura").